LES FONDEMENTS AXIOMATIQUES DE LA MESURE DES INÉGALITÉS

Thibault Gajdos

Dalloz | « Revue d'économie politique »

2001/5 Vol. 111 | pages 683 à 719

ISSN 0373-2630

Thibault Gajdos
Université Paris I

Les fondements axiomatiques de la mesure des inégalités

The ethical fundations of inequality indices

mesure des inégalités - attitude à l'égard des inégalités - modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang

inequality measurement - attitude towards inegalities - rank-dependent expected utility model

(*) Je remercie Alain Chateauneuf, Michèle Cohen, Michel Dollé, Marc Fleurbaey, Jean-Yves Jaffray, Yannick L'Horty, François Legendre, Cyril Nouveau et Jean-Marc Tallon pour leurs commentaires enrichissants et leurs encouragements. Je reste bien entendu seul responsable des erreurs que peut contenir ce document.

(**) EUREQua, Université de Paris 1, 106-112 boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris cedex 13, e-mail : gajdos univ-paris1.fr

Résumé. — La recherche d'une mesure objective des inégalités, sur le modèle des mesures des grandeurs physiques est vaine : la mesure des inégalités dépend, en effet, de l'opinion des membres de la société en matière de justice distributive. Il est donc souhaitable que les opinions qui sous-tendent les mesures des inégalités soient aussi explicites que possible. Nous nous attachons, dans cette note, à présenter et à discuter en détail les conséquences des opinions sur lesquelles est susceptible de se fonder une mesure des inégalités.

Nous distinguons deux classes d'indices d'inégalités, selon qu'ils respectent, ou non, l'axiome d'indépendance. Les premiers sont les indices à la Atkinson-Kolm-Sen, et s'inscrivent dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité de von Neumann et Morgenstern. Les second sont les indices de Gini, Gini généralisés et Gini super-généralisés, et s'inscrivent dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang de Yaari ou de Quiggin.

Les indices de Gini et ses généralisations permettent une description beaucoup plus fine des opinions en matière de justice redistributive que les indices à la Atkinson-Kolm-Sen, puisqu'ils reposent sur des axiomes plus faibles. Ces indices semblent donc particulièrement bien adaptés pour évaluer l'adéquation des politiques redistributives à des objectifs en matière de justice sociale.

Summary. — *It is hopeless to look for an objective measure of inequalities. Indeed, the measure of inequalities depends on citizen's opinions about justice. It is hence necessary to explicit the ethical fundations of inequality indices. We try, in this note, to present and discuss thoroughly the consequences of the various opinions on which an inequality index may be built. We distinguish two classes of inequality indices. The first one is the class of Atkinson-Kolm-Sen indices, which respect the independence axiom, and implicitely rely on the von Neumann and Morgenstern model. The second one is the class of the Generalized Ginis, which do not respect the independence axiom, and implicitely rely on the Rank-Dependent Expected Utility model.*

The Ginis indices allow for a thiner representation of citizen's attitude towards inequality. These indices seem hence of particular interest for evaluating redistributive policies and their adequacy to social objectives.

1. Introduction

Les inégalités ont-elles augmenté dans les vingt dernières années ? Quel est le lien entre la croissance économique et l'évolution des inégalités ? Quelles sont les conséquences du chômage sur les inégalités ? À quel point une politique fiscale ou sociale permet-elle de réduire les inégalités ? Autant de questions qui sont au cœur des débats politiques et économiques contemporains, et qui supposent que l'on soit capable de mesurer les inégalités. Or, cela ne va pas de soi.

L'histoire des théories de la mesure des inégalités est déjà ancienne, puisque l'on peut la faire remonter aux premières années de ce siècle, avec en particulier les contributions de Pigou [44] et Dalton [18]. C'est cependant dans les années soixante-dix que ce champ de la théorie économique prit véritablement son essor, avec les travaux de Kolm [36], [33], [34] (qui fut, en la matière, un pionnier), Atkinson [6], et Sen [58]. Ce regain d'intérêt s'explique, en grande partie, par les développements contemporains des théories économiques de la justice (1) et de la théorie du choix dans le risque.

Les théories économiques de la justice permirent de mieux comprendre les problèmes que soulevaient la mesure des inégalités (2). Mesurer les inégalités, c'est évaluer le degré d'injustice d'une distribution du point de vue de la justice distributive (3). La mesure des inégalités doit donc s'appuyer sur une analyse de la justice distributive. D'où le programme de recherche proposé par Kolm [32], qui fut le premier à proposer des indices d'inégalités explicitement construits à partir des jugements collectifs en matière de justice distributive :

> « (...) il faut connaître les opinions des citoyens sur la justice de la répartition. Pour aider à la réalisation de ce difficile problème, il est utile de procéder à une analyse *a priori* des structures des opinions de justice distributive » (p. 158).

Atkinson [6], l'un des pionniers de la mesure normative des inégalités, adhéra totalement à ce programme de recherche :

> « Dans cet article, j'ai examiné le problème de la mesure des inégalités de revenus (ou de richesses, ou de consommations). Jusqu'à présent, ce problème était habituellement traité en utilisant des mesures statistiques simples, comme l'indice de Gini, la variance ou l'écart relatif à la moyenne. J'ai essayé, néanmoins, de défendre la thèse selon laquelle cette approche traditionnelle était erronée. Premièrement, l'utilisation de telles mesures sert souvent à dissimuler le fait qu'on ne peut établir un ordre complet entre les distributions de revenus sans spécifier complètement la forme de la fonction de bien-être social. Deuxièmement, l'étude des fonctions de bien-être social sur lesquelles ces mesures sont implicitement construites montre que, dans de nombreux cas, elles ont des propriétés qui semblent peu acceptables, et qu'en général il n'y a pas de raison de croire qu'elles soient en accord avec les valeurs sociales. Pour ces raisons, j'espère que ces mesures traditionnelles seront rejetées en faveur de la prise en compte directe des propriétés que l'on souhaite voir vérifiées par les fonctions de bien-être social », (Atkinson, [6], p. 26).

La théorie de la décision dans le risque donna les moyens techniques de remplir ce programme. En effet, toute distribution de revenus peut s'interpréter comme une loterie. Or l'objet de la théorie du choix dans le risque est, précisément, de représenter les préférences des individus sur l'ensemble des loteries, à partir d'un nombre réduit d'axiomes représentant la structure fondamentale des opinions individuelles sur le caractère plus ou moins désirable des loteries. Aussi faut-il voir plus qu'une coïncidence si deux contri-

(1) Pour une introduction aux théories économiques de la justice, cf. par exemple Fleurbaey [26], Kolm [35], ou Roemer [50].

(2) Sur l'articulation entre les théories économiques de la justice et la théorie de la mesure des inégalités, cf. en particulier Sen [58] chapitre 1 et [62] chapitre 6.

(3) Ce qui, naturellement, ne recouvre pas l'ensemble des perspectives que l'on peut avoir sur la justice. Les notions de liberté, de responsabilité, d'envie, par exemple, qui ont été et sont encore pour une large part au cœur des débats alimentant les théories économiques de la justice ne sont pas prises en compte ici.

butions fondamentales, l'une à la théorie du risque — due à Rothschild et Stiglitz [51] —, et l'autre à la théorie de la mesure des inégalités — due à Atkinson [6] — ont été publiées la même année (4). Le modèle de décision dans le risque le plus répandu en économie est celui de von Neumann et Morgenstern [42] (5). C'est donc ce modèle qui servit, plus ou moins explicitement, de cadre à la théorie de la mesure des inégalités.

Toutefois, on peut se demander si le modèle de von Neumann et Morgenstern constitue un cadre pleinement satisfaisant pour la mesure des inégalités. Ce modèle repose, en effet, sur un axiome d'indépendance dont la pertinence est discutable. Dans le cadre de la mesure des inégalités (6) l'axiome d'indépendance revient à supposer que l'ordre entre deux distributions de revenus ne dépend pas des parties communes de ces distributions. Si l'on suppose de plus que la fonction d'évaluation des distributions est cardinale, cela implique que l'évaluation de la variation des inégalités engendrée par la modification du revenu d'un individu ne dépend pas des revenus des individus qui ne sont pas concernés par ce changement. Il n'est pas sûr qu'un tel principe soit unanimement accepté.

Le modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang, introduit par Quiggin [45] et Yaari [65], qui repose sur un axiome d'indépendance plus faible, semble en revanche prometteur. En particulier, un tel modèle permet, contrairement au modèle de von Neumann et Morgenstern, de donner un fondement normatif clair à l'indice de Gini et à ses généralisations. Or l'indice de Gini et ses variantes sont particulièrement bien adaptés à l'évaluation de l'adéquation des politiques de redistribution à des objectifs en matière de justice sociale, dans la mesure où ils sont compatibles avec des opinions beaucoup plus variées que celles sur lesquelles s'appuient implicitement les indices respectant l'axiome d'indépendance.

Dans un premier temps, nous présenterons le cadre dans lequel sont définis les indices d'inégalités. Puis nous nous tournerons vers les indices d'inégalités normatifs (i.e., reposant sur une opinion explicite sur la justice distributive) dans le cadre du modèle de von Neumann et Morgenstern. Enfin, nous présenterons les apports du modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang à la mesure des inégalités.

(4) Atkinson lui-même a insisté sur les liens étroits qui existaient entre sa théorie de la mesure des inégalités et les travaux de Rothschild et Stiglitz. Il écrit ainsi : « mon intérêt pour la question de la mesure des inégalités a initialement été stimulé par la lecture d'une version préliminaire de l'article de Rothschild et Stiglitz », (Atkinson, [6], p. 244).

(5) Ce modèle est également connu sous le nom de « modèle d'espérance d'utilité ».

(6) L'axiome d'indépendance a également été remis en cause dans le cadre de la modélisation des comportements individuels face au risque, notamment par Allais [1].

2. Préliminaires : opinions sur la justice distributive, fonctions d'évaluation et indices d'inégalités

2.1. La structure des préférences

Nous supposerons que la distribution des revenus au sein d'une population de taille $n(n \in \mathbb{N}^*)$ est une fonction de $\{1, ..., n\}$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout $i \in \{1, ..., n\}$, associe le réel x_i (x_i est le revenu de l'individu i). Nous nous bornerons donc à l'étude de distributions de revenus du type $\left(x_1, \frac{1}{n}; x_2, \frac{1}{n}; ...; x_n, \frac{1}{n}\right)$. Une telle distribution de revenus sera notée : $X = (x_1, ..., x_n)$. Nous noterons D le domaine de X, D pouvant être l'un des ensembles suivants (7) : $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_{++}$; le vecteur unité de $\mathbb{R}^n$ sera noté 1_n. Si D n'est pas précisé, D $=\mathbb{R}$. Par ailleurs, nous désignerons par $\tilde{X}$ (respectivement $\hat{X}$) la distribution obtenue par une permutation de X, telle que $\tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2 \leq ... \leq \tilde{x}_n$ (respectivement : $\hat{x}_1 \geq \hat{x}_2 \geq ... \geq \hat{x}_n$). L'ensemble des vecteurs $\tilde{X}$ (respectivement $\hat{X}$) sera noté $\tilde{D}^n$ (respectivement $\hat{D}^n$). Nous désignerons par F_X la fonction de répartition associée à X, et par F_X^{-1} sa fonction de répartition inverse continue à gauche (appelée aussi fonction quantile) : $F_X^{-1}(p) := \inf \{x \in D | F_X(x) \geq p\}$.

Nous noterons $\mathbb{D} = \bigcup_{n \in} D^n$, l'ensemble des profils de revenus (positifs) de dimension supérieure ou égale à 1 et $n(X)$ la dimension du vecteur $X \in \mathbb{D}$. Notons que toutes les distributions de la forme $Y = (y_1, p_1; y_2, p_2; ...; y_k, p_k)$ où les p_i sont des nombres rationnels strictement positifs et tels que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ appartiennent à $\mathbb{D}$. En effet, il existe un entier $m \geq 2$ tel que $Y = \left(y_1, \frac{1}{m}; y_2, \frac{1}{m}; ...; y_m, \frac{1}{m}\right)$. De la même manière, on désignera par $\tilde{\mathbb{D}}$ l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{D}^n$ et par $\hat{\mathbb{D}}$ l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{D}^n$.

Supposons qu'il existe une relation de préférence définie sur l'ensemble des distributions de revenus, *qui reflète une opinion donnée sur la justice distributive*. Avant de poursuivre, il est nécessaire de préciser la structure de cette relation de préférence.

En premier lieu, nous supposerons qu'il existe une relation d'ordre totale (qui définit un préordre complet) sur D^n (dans toute cette section, n est fixé) :

Axiome 1 *(Préordre complet). Il existe une relation binaire totale transitive et non triviale sur* D^n. *Cette relation sera notée* $\succeq_n$. *De plus, on notera*

(7) $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}_{++}$ l'ensemble des réels strictements positifs.

$X >_n Y$ *si* $[X \succeq_n Y$ et $Y \not\succeq_n X]$. *Si* $[X \succeq_n Y$ et $Y_n \geq X]$ *on notera* $X \sim_n Y$.

Cet axiome peut, à première vue, paraître naturel. Il est cependant assez fort. En effet, l'hypothèse selon laquelle l'ordre sur les distribution de D^n est *complet* va notablement restreindre l'ensemble des fonctions susceptibles de représenter cet ordre. Or, comme le remarque Sen [58], on peut penser qu'un tel ordre complet n'existe pas, et qu'il est seulement possible de définir un *ordre partiel* sur l'ensemble des distributions de revenus.

Par ailleurs, l'hypothèse selon laquelle l'ordre porte directement sur les distributions de revenus n'est pas neutre : cela signifie que l'on rejette hors du champ de la mesure des inégalités toutes les considérations qui ne portent pas directement sur les distributions de revenus (8).

On supposera par ailleurs que la relation $\succeq_n$ est continue sur D^n :

Axiome 2 *(Continuité). La relation* $\succeq_n$ *est continue sur* D^n : *pour tout* $X \in D^n$, $\{Y|Y >_n X\}$, $\{Y|X >_n Y\}$ *sont des ouverts de* D^n.

Notons que cet axiome n'est pas satisfait, notamment, par les ordres lexicographiques. Debreu [19] a montré que cet axiome, ajouté à l'axiome 1 (préordre complet) permet d'assurer l'existence d'une fonction continue $W_n: D \to \mathbb{R}$, qui représente (9) $\succeq_n$.

Théorème 1 (Debreu, 1959) *Soit une relation binaire* $\succeq_n$ *sur* D^n, *satisfaisant les axiomes 1 (préordre complet) et 2 (continuité). Il existe alors une fonction continue* $W_n{:}D^n \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\forall X, Y \in D^n, X \succeq_n Y \Leftrightarrow W_n(X) \geq W_n(Y)$$

Notons que W_n n'est pas unique : pour tout fonction continue et strictement croissante $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Gamma_n = \phi \circ W_n$ représente également $\succeq_n$. Nous dirons que W_n est une *fonction d'évaluation* des distributions de revenus.

Remarquons que, à strictement parler, W_n n'est *pas* une fonction de bien-être social. En effet, une fonction de bien-être social dépend des préférences des individus, que l'on n'a *a priori* aucune raison de supposer identiques (10). En revanche, la fonction d'évaluation ne dépend que de la distribution des revenus. Par conséquent, la pertinence d'une fonction d'évaluation des distributions de revenus dépendra du degré d'*unanimité* avec laquelle les *individus* adhèrent aux axiomes qui la caractérisent.

On supposera de plus que l'*identité* des individus ne joue aucun rôle dans l'évaluation des inégalités : que ce soit l'individu i qui ait le revenu a et

(8) Sur les problèmes que posent une telle approche, cf. par exemple Sen [62], [61]. Notons que de nombreuses variables pourraient *a priori* entrer en ligne de compte : capacités physiques et intellectuelles, statut social, égalités devant la loi etc.

(9) On dit qu'une fonction W_n représente la relation $\succeq_n$ si, pour tout $X,Y \in D^n$: $X \succeq_n Y \Leftrightarrow W_n(X) \geq W_n(Y)$ ..

(10) Pour plus de détails, cf. Fleurbaey [26] chapitre 4 et Sen [59].

l'individu j qui ait le revenu b, ou que ce soit le contraire n'a aucune importance. Formellement, cela revient à supposer qu'il n'y a, du point de vue de l'ordre $\succeq_n$, aucune différence entre une distribution de revenus X et une distribution de revenus obtenue par permutation des composantes de X :

Axiome 3 *(Impartialité). Pour toute matrice de permutation* Π :

$$\forall X \in D^n, \Pi X \sim_n X$$

On peut se demander à quel point il est raisonnable de supposer que les individus adhèrent, *individuellement*, à l'axiome d'impartialité. Pourtant, de l'*Éthique à Nicomaque* d'Aristote [4] à la *Théorie de la Justice* de John Rawls [48], en passant par *Le Léviathan* de Hobbes [31], et les travaux de Harsanyi [29], [30], l'impartialité est apparue inséparable de l'idée même de justice, que ce soit sous la forme du thème de la « place d'autrui » chez les modernes, ou sous celle de la position originelle (popularisée sous le nom de « voile d'ignorance ») chez John Rawls. Dans tous les cas, l'impartialité est, au minimum, une condition nécessaire de la justice. Supposer que *tous* les individus souscrivent à l'axiome d'impartialité *lorsqu'il s'agit d'évaluer des distributions de revenus* revient donc à supposer que nous avons affaire à des individus doués d'un sens moral. En ce sens, on peut, comme le fait Kolm [32], [35], voir dans le respect de l'axiome d'impartialité une *conséquence logique* de l'adhésion des individus à l'idée même de justice. Cela permet également de donner un contenu concret à la notion de « préférences de la société » : il s'agit, en réalité, des préférences d'un membre quelconque de la société lorsqu'il se place derrière le « voile d'ignorance ». Il sera parfois commode de donner un nom à cet individu : nous l'appellerons « décideur ». L'axiome 3 (impartialité) impose que W_n soit une fonction symétrique.

L'axiome suivant s'interprète facilement : il impose que si $Y \in D^n$ est obtenue à partir de $X \in D^n$ en augmentant le revenu d'au moins un individu, sans qu'aucun individu ne voie son revenu diminuer, alors $Y \succeq_n X$. En d'autres termes, il impose que l'ordre sur D^n respecte la dominance stochastique au premier ordre (sous réserve que W_n soit symétrique) (11).

Axiome 4 *(Monotonie). La relation* $\succeq_n$ *est monotone : quels que soient* X, Y *de* D^n, *si pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$, $x_i \geq y_i$ *et s'il existe* j *tel que* $x_j > y_j$, *alors* $X \succ_n Y$.

Deux distributions de revenus peuvent différer par le *revenu total* qui est *réparti* entre les individus d'une part, et par la *manière* dont ce revenu est *réparti* d'autre part. Adhérer à l'axiome de monotonie, c'est privilégier le premier aspect par rapport au second. Supposons, par exemple, que le

(11) Cette propriété n'est pas équivalente à la propriété de Pareto-cohérence d'une fonction de bien-être social. En effet, une fonction de bien-être social est définie sur l'ensemble des utilités individuelles u_i. Une telle fonction de bien-être social est Pareto-cohérente si, et seulement si elle est croissante en u_i, pour tout i, (sous réserve qu'elle soit symétrique). Comme l'ont montré Amiel et Cowell [2], la Pareto-cohérence, entendue dans ce sens strict, *n'est pas équivalente à la monotonicité (croissante) de* W_n *par rapport à* x_i.

revenu de l'individu le plus riche de la société double, les autres revenus demeurant inchangés. Souscrire à l'axiome de monotonie (auquel Kolm [32] donne le nom de « bienveillance ») c'est considérer que la seconde distribution de revenus est préférable à la première.

Cet axiome, ajouté aux précédents, implique que toute fonction $W_n : D^n \to \mathbb{R}$ représentant l'ordre $\succeq_n$ est symétrique, continue, monotone et croissante en chacun de ses arguments.

Il est à présent possible de construire un indice d'inégalités compatible avec l'opinion sur la justice distributive représentée par W_n. Pour cela, Kolm [36] définit la notion de *revenu égal équivalent* (pour la fonction d'évaluation W_n) :

Définition 1 *On appelle revenu égal équivalent à* $X \in D^n$ *le revenu* $R_n(X)$ *qui, s'il est attribué à chaque individu, conduit à une distribution de revenus équivalente à* X *pour la fonction d'évaluation* W_n, *c'est-à-dire :*

$$W_n(R_n(X)\,1_n) = W_n(X)$$

La différence :

$$I_n^a(X) = R_n(\bar{X}\,1_n) - R_n(X) = \bar{X} - R_n(X) \qquad (1)$$

représente alors simplement le coût par tête des inégalités exprimé en termes monétaires. On peut encore écrire ce coût monétaire en termes relatifs. On obtient alors :

$$I_n^r(X) = \frac{\bar{X} - R_n(X)}{\bar{X}} \qquad (2)$$

Remarquons que $I_n^r(X)$ et $I_n^a(X)$ sont positifs ou nuls, et nuls si et seulement si $X = \bar{X}\,1_n$. Par ailleurs, plus le coût des inégalités est élevé, plus $I_n^r(X)$ et $I_n^a(X)$ sont grands. Par conséquent, $I_n^r(X)$ et $I_n^a(X)$ sont deux indices d'inégalités. D'une manière générale, nous dirons qu'un indice d'inégalités I_n est *normatif* s'il peut s'écrire sous la forme (1) ou (2), pour une fonction d'évaluation W_n ayant un contenu normatif. Si I_n s'écrit sous la forme (1), nous dirons qu'il s'agit d'un indice absolu ; si I_n s'écrit sous la forme (2), nous dirons qu'il s'agit d'un indice relatif.

Il est habituel de compléter ces axiomes par un axiome d'invariance : il s'agit de déterminer quelles sont les transformations des distributions qui n'affectent pas l'indice d'inégalités.

La première possibilité consiste à supposer que la multiplication de tous les revenus par une même constante n'affecte pas les inégalités (cf. Kolm [32], et Atkinson [6] :

Axiome 5 *(λ-invariance). La multiplication de tous les revenus par une constante strictement positive ne modifie pas les inégalités : pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *et* $X \in D^n$,

$$I(\lambda X) = I(X)$$

Une autre possibilité consiste à supposer qu'augmenter tous les revenus d'un même montant ne modifie pas les inégalités (cf. Kolm [32], [33]) :

Axiome 6 *(μ-invariance). L'addition d'une même constante à tous les revenus ne modifie pas les inégalités : pour tout* $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $X \in D^n$:

$$I(X) = I(X + \mu 1_n)$$

La question de la « bonne » propriété d'invariance que doit posséder un indice d'inégalités a été longuement débattue. Pour Dalton [18], par exemple, une augmentation du même montant de tous les revenus tend à réduire les inégalités. Kolm [33], en revanche, suggère la thèse opposée, en soulignant qu'une augmentation équiproportionnelle de tous les revenus accroît les écarts absolus entre ces revenus. Il qualifie, pour cette raison, les indices λ-invariants d'indices « de droite », tandis que les indices μ-invariants seront qualifiés d'indices « de gauche » (12).

Étant donné un indice I_n ainsi défini, il est possible de définir un ordre $\geq_{I_n}$ sur D^n de la manière suivante : $Y \geq_{I_n} X$ (ce que l'on lira « X est au moins plus inégale que Y pour l'opinion représentée par W_n ») si et seulement si $I_n(Y) \leq I_n(X)$. Naturellement, le fait que X soit plus inégale que Y ne signifie nullement que Y sera préférée à X par une société dont l'opinion est représentée par W_n. Ainsi, par exemple, si l'on double tous les revenus, et que l'on effectue un transfert de revenu du plus pauvre vers le plus riche, les inégalités seront en général jugées plus grandes dans la nouvelle distribution (selon l'ordre $\geq_{I_n}$), mais cette distribution sera néanmoins préférée à l'ancienne (selon l'ordre $\geq_n$). Si $\geq_n$ respecte les axiomes 1 (préordre complet), 2 (continuité) et 3 (impartialité), il en va de même de $\geq_{I_n}$. Nous supposerons, dans tout ce qui suit, que ces axiomes ainsi que l'axiome 4 (monotonie) sont bien respectés.

Par ailleurs, nous supposerons que l'indice I_n vérifie la propriété de normalisation suivante :

Propriété 1 *(normalisation). Soit* $I_n : D^n \to \mathbb{R}$ *un indice d'inégalités.*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad I_n(\lambda 1_n) = 0$$

2.2. Ordres sur les distributions de revenus

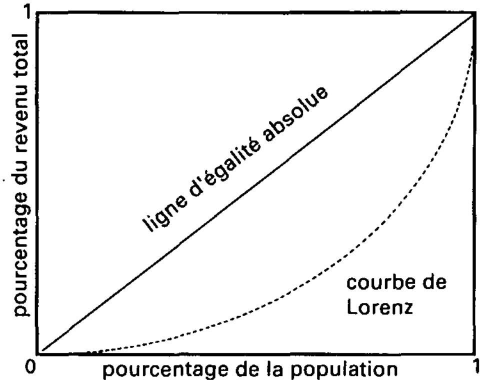
S'il est difficile de définir explicitement l'ensemble des distributions de revenus moins inégales qu'une distribution X donnée, il est néanmoins possible de proposer un certain nombre de critères permettant d'ordonner (partiellement) les distributions de revenus. L'adhésion à chacun de ces critères imposera des restrictions sur la fonction d'évaluation des distributions. En

(12) Cf. Kolm [35] chapitre 10 pour une discussion plus détaillée des axiome d'invariance.

ce sens, ces critères permettent d'enrichir la structure des jugements collectifs en matière d'inégalités. Afin de mieux saisir la signification de ces différents ordres, nous les formulerons d'abord pour des distributions de D^n (pour un n fixé), avant d'en donner une définition plus générale, valable pour des distributions dans $\mathbb{D}$ (*i.e.*, pour des populations de tailles éventuellement différentes).

Le quasi-ordre qui est le plus utilisé dans le cadre de la mesure des inégalités est sans aucun doute le quasi-ordre de Lorenz. Son interprétation est assez intuitive. Considérons la courbe de Lorenz $L\left(\frac{p}{n}\right)$, qui représente la part du revenu total détenue par les p plus pauvres (cf. graphique 1) :

$$L\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{p} \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i}$$



Graphique 1 Courbe de Lorenz

Plus la distribution des revenus est inégale, plus la courbe de Lorenz qui lui est associée est convexe. À la limite, si l'individu le plus riche possède, à lui seul, la totalité des revenus, la courbe de Lorenz sera confondue avec l'axe horizontal pour $\frac{p}{n} < 1$, et verticale au point $\frac{p}{n} = 1$. Si, en revanche, le revenu est également distribué entre tous les individus, la courbe de Lorenz sera confondue avec la première bissectrice (ligne de parfaite égalité). Ainsi, les courbes de Lorenz permettent d'établir un ordre partiel sur l'ensemble des distributions de revenus : si la courbe de Lorenz associée à la distribution X est toujours au-dessus de celle associée à la distribution Y, on dira que X est moins inégale que Y au sens du quasi-ordre de Lorenz (si les courbes de Lorenz se croisent, le critère de Lorenz ne permet pas de conclure).

Formellement, le quasi-ordre de Lorenz peut être formellement défini de la manière suivante :

Définition 2 *(Quasi-ordre de Lorenz sur* D^n*). Soit* $X, Y \in D^n$ *. On dit que* Y *est moins inégale que* X *au sens du quasi-ordre de Lorenz si, et seulement si :*

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i}, \quad \forall k \in \{1, ..., n\}$$

Ce que l'on notera : $Y \geq_L X$.

La distribution Y est moins inégale que la distribution X au sens du quasi-ordre de Lorenz si la part du revenu total détenue par les k plus pauvres est plus grande dans la distribution Y que dans la distribution X , et ce pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. On notera (13) $Y \geq_L X$.

Le quasi-ordre de Lorenz est étroitement lié au principe de transfert, que l'on peut définir formellement ainsi :

Axiome 7 *(Principe de transfert). Soit* $X, X' \in D^n$ *, avec* $\bar{X} = \bar{X}'$*. S'il existe* i, j *tels que* $x_i < x_i' \leq x_j' < x_j, x_i' - x_i = x_j - x_j'$ *et* $\forall k \neq i, j$, $x_k = x_k'$ *, alors* $X' > X$.

Ce principe (14), proposé par Pigou [44] et Dalton [18], signifie que si X′ peut être obtenue à partir de X en effectuant un transfert d'un riche vers un pauvre, sans modifier l'ordre des revenus entre ces individus (transfert de Pigou-Dalton), alors X′ est préférée à X .

Le célèbre théorème de Hardy-Littlewood-Polyà [28] établit qu'un décideur respecte le quasi-ordre de Lorenz pour des distributions de même moyenne si, et seulement si, il respecte le principe de transfert :

Théorème 2 (Hardy, Litllewood et Polya, 1934) *Soit* $\tilde{X}$ *et* $\tilde{Y}$ *deux vecteurs de* $\tilde{D}^n$ *ayant la même moyenne. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe une matrice bistochastique (15) Q *(qui n'est pas une matrice de permutation) telle que* $\tilde{Y} = Q\tilde{X}$

(ii) $\tilde{Y} >_L \tilde{X}$

(13) Notons que si X et Y ont la même moyenne, $Y \geq_L X$ si et seulement si Y domine X au sens de la dominance stochastique au second ordre (cf. par exemple Rothschild et Stiglitz [51]).

(14) Dans le cadre de la théorie de la décision, le principe de transfert — sous une forme légèrement différente puisque les distributions étudiées sont continues — correspond à la notion d'accroissement du risque à moyennne constante (cf. Rothschild et Stiglitz [51]).

(15) Une matrice bistochastique est une matrice dont toutes les composantes sont positives ou nulles, et dont la somme des composantes de chaque ligne et de chaque colonne est égale à 1).

(iii) $\tilde{Y}$ *peut être obtenue à partir de* $\tilde{X}$ *par une séquence finie non vide de transferts des riches vers les pauvres qui ne modifient pas l'ordre des revenus dans la distribution (transferts dits de Pigou-Dalton).*

Par conséquent, si $\geq$ est cohérent avec le quasi-ordre de Lorenz, la société doit respecter le principe de transfert. Il est clair qu'un décideur respecte le principe de transfert si, et seulement si, tout indice d'inégalité construit à partir de la fonction représentant ses préférences et vérifiant l'axiome 5 (λ-invariance) ou l'axiome 6 (μ-invariance) est cohérent avec le quasi-ordre de Lorenz, les propriétés d'invariance permettant de se ramener à des comparaisons de distributions de même moyenne. Toutefois, de ce point de vue, l'axiome 5 (λ-invariance) est plus naturel, dans la mesure où la multiplication de tous les revenus d'une distribution donnée par une même constante strictement positive n'affecte pas la courbe de Lorenz associée à cette distribution.

L'axiome de transfert, bien que largement accepté par les économistes, est néanmoins discutable (16), comme l'ont montré notamment Amiel et Cowell [3], Moyes [39] et Chateauneuf [11]. L'exemple suivant, que nous empruntons à Amiel et Cowell pose clairement le problème. Supposons que l'on souhaite comparer les deux distributions de revenus suivantes : $X = (1, 4, 7, 10, 13)$ et $Y = (1, 5, 6, 10, 13)$. La distribution Y est obtenue à partir de X par un transfert de Pigou-Dalton. Pourtant, la situation relative de l'individu plus pauvre (par rapport à l'individu dont le revenu est immédiatement supérieur) est moins favorable dans la distribution Y que dans la distribution X. Doit-on néanmoins considérer que Y est préférable à X ? Ce n'est pas évident. Comme le soulignent Amiel et Cowell, le problème vient du fait que l'axiome de transfert doit être vérifié indépendamment des revenus des membres de la société qui ne sont pas concernés par le transfert.

Les résultats de l'étude empirique d'Amiel et Cowell [3] confirment les difficultés que soulève le principe de transfert puisque 38 % des personnes interrogées rejettent ce principe lorsqu'on leur soumet l'axiome sous sa forme littérale, et que cette proportion s'élève à 64 % lorsqu'on leur demande leur avis sur un exemple numérique. Notons que les étudiants en économie de Hebrew University (Jerusalem) se distinguent des autres personnes interrogées. Ces étudiants ont suivis, durant leurs premières années d'étude, un cours sur les courbes de Lorenz. Et ils soutiennent massivement (à 83 % lorsque la question est soumise sous forme littérale) le principe de transfert. Ce qui conduit Amiel et Cowell à la réflexion suivante :

> « A la lumière de ces résultats, il est peut-être temps que les économistes eux-mêmes examinent à nouveau certains des axiomes qui sont évoqués a peu près sans aucune remise en question dans la plupart des travaux théoriques et empiriques sur les inégalités. Relâcher ou respécifier l'axiome de transfert n'est peut-être pas aussi choquant qu'il y paraît au premier abord ; les question de savoir dans quelle mesure ceci est possible, et comment cela doit être fait, sont évidemment des sujets futurs de recherche. » (Amiel et Cowell, [3], p. 22)

(16) Dalton [44] lui-même doutait de la validité de ce principe lorsque l'on considère des sociétés constituées de plus de deux individus.

Il est possible de renforcer le principe de transfert en raisonnant en termes d'écarts absolus entre les revenus sur l'ensemble de la distribution : si l'écart entre le revenu de l'individu qui occupe le i-ième rang et celui de l'individu qui occupe le $(i+1)$-ième rang est plus petit dans la distribution Y que dans la distribution X, et ce *pour tout* i, on pourra estimer que Y est moins inégale que X. C'est le principe du quasi-ordre différentiel absolu :

Définition 3 (*Quasi-ordre différentiel absolu sur* D^n). *Soit* X et Y $\in D^n$. *On dit que* Y *est moins inégale que* X *au sens du quasi-ordre différentiel absolu si, et seulement si,* $\bar{X} = \bar{Y}$ *et :*

$$\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_i \leq \tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i, \quad \forall i \in \{1, ..., n-1\}$$

Ce que l'on notera : Y $\geq_{DA}$ X.

Remarquons que Y $\geq_{DA}$ X implique Y $\geq_L$ X, mais la réciproque est fausse. Par exemple, si $Y = (5, 10, 16, 19)$ et $X = (5, 10, 15, 20)$, Y $\geq_L$ X, mais Y $\not\geq_{DA}$ X (cf. Moyes [39]).

Une autre possibilité consiste à se concentrer sur les rapports de revenus : si le rapport entre le revenu de l'individu qui occupe le i-ième rang et celui de l'individu qui occupe le $(i+1)$-ième rang est plus petit dans la distribution Y que dans la distribution X, et ce *pour tout* i, on pourra estimer que Y est moins inégale que X. C'est le principe du quasi-ordre différentiel relatif.

Définition 4 *(Quasi-ordre différentiel relatif sur* D^n*). Soit* X et Y $\in D^n$. *On dit que* Y *est moins inégale que X au sens du quasi-ordre différentiel relatif si, et seulement si :*

$$\frac{\tilde{y}_{i+1}}{\tilde{y}_i} \leq \frac{\tilde{x}_{i+1}}{\tilde{x}_i}, \quad \forall i \in \{1, ..., n-1\}$$

On notera alors : Y $\geq_{DA}$ X.

Ces deux derniers quasi-ordres ont été introduits dans le cadre de la théorie de la majoration par Marshall et Olkin [37], et ont été notamment étudiés dans le cadre de la mesure des inégalités par Moyes [39] et Chateauneuf [11].

Toutes ces définitions peuvent être généralisées à l'ensemble $\mathbb{D}$ afin de permettre la comparaison de populations de tailles différentes (cf. par exemple Chateauneuf [11]).

Définition 5 *(Quasi-ordre de Lorenz sur* $\mathbb{D}$*). Soit* X,Y $\in \mathbb{D}$. *On dit que* Y *est moins inégale que* X *au sens du quasi-ordre de Lorenz si, et seulement si :*

$$\frac{\int_0^p F_Y^{-1}(t)\,dt}{\bar{Y}} \geq \frac{\int_0^p F_X^{-1}(t)\,dt}{\bar{X}}, \quad \forall p \in [0, 1]$$

Ce que l'on notera : Y $\geq_L$ X.

Ainsi, Y $\geq_L$ X si et seulement si la courbe de Lorenz associée à Y est au-dessus de celle associée à X.

Définition 6 *(Quasi-Ordre différentiel absolu sur* $\mathbb{D}$*). Soit* X *et* Y $\in \mathbb{D}$*. On dit que* Y *est moins inégale que* X *au sens du quasi-ordre différentiel absolu si, et seulement si,* $\bar{X} = \bar{Y}$ *et :*

$$F_Y^{-1}(v) - F_Y^{-1}(u) \leq F_X^{-1}(v) - F_X^{-1}(u), \quad \forall 0 < u < v \leq 1$$

Ce que l'on notera : $Y \geq_{DA} X$.

Ce quasi-ordre a été introduit en statistique par Bickel et Lehmann [8], [9].

Définition 7 *(Quasi-ordre différentiel relatif sur* $\mathbb{D}$*). Soit* X *et* Y $\in \mathbb{D}$*. On dit que* Y *est moins inégale que* X *au sens du quasi-ordre différentiel relatif si, et seulement si :*

$$\frac{F_Y^{-1}(v)}{F_Y^{-1}(u)} \leq \frac{F_X^{-1}(v)}{F_X^{-1}(u)}, \quad \forall 0 < u < v \leq 1$$

On notera alors : $Y \geq_{DR} X$.

Enfin, on dira qu'une société (ou un décideur) ayant une relation de préférence $\geq_n$ sur D^n (respectivement : $\geq$ sur $\mathbb{D}$) respecte l'ordre K (K = L, AR, DR) sur D^n (respectivement : sur $\mathbb{D}$) si pour tout $X, Y \in D^n$ (respectivement : $X, Y \in \mathbb{D}$), $Y \geq_K X$ implique $Y \geq_n X$ (respectivement : $Y \geq X$).

Deux grandes catégories d'indices normatifs peuvent être distinguées, selon que la fonction d'évaluation des distributions de revenus sur laquelle ils sont construits respecte, ou non, l'axiome d'indépendance. Les premiers sont les indices à la Atkinson-Kolm-Sen, et les seconds les indices de Gini, Gini généralisés et Gini super-généralisés. Nous les présenterons successivement.

3. L'approche d'Atkinson-Kolm-Sen

Kolm [36], [33], [34], Atkinson [6] et Sen [58] ont proposé une approche axiomatique de la mesure des inégalités qui s'articule autour de l'axiome d'indépendance, du principe de transfert, et d'axiomes d'invariance. Cette approche permet en particulier de construire deux indices, connus sous les noms d'indice d'Atkinson et d'indice de Kolm-Pollak.

Nous présenterons, dans un premier temps, les axiomes proposés par ces auteurs. Cela nous permettra de définir les indices d'Atkinson et de Kolm-Pollak pour des populations de taille fixe. Nous nous tournerons ensuite vers une généralisation de ces indices pour des populations de taille variable. Nous exposerons enfin quelques-unes des difficultés que peuvent soulever ces indices, en nous concentrant sur l'indice d'Atkinson.

3.1. L'axiome d'indépendance

Les indices d'Atkinson-Kolm-Sen vérifient l'axiome d'indépendance : l'ordre entre deux distributions de revenus ne dépend pas de la partie commune à ces deux distributions.

Axiome 8 *(Indépendance) :*

Soit $i \in \{1, ..., n-1\}$, $(x_1, ..., x_i)$, $(y_1, ..., y_i) \in D^i$, $(z_{i+1}, ..., z_n) \in D^{n-i}$.
Alors, pour tout $(t_{i+1}, ..., t_n) \in D^{n-i}$,

$$(x_1, ..., x_i, z_{i+1}, ... z_n) \geq (y_1, ..., y_i, z_{i+1}, ..., z_n)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, ..., x_i, t_{i+1}, ... t_n) \geq (y_1, ..., y_i, t_{i+1}, ..., t_n)$$

L'axiome d'indépendance, plus connu, dans le cadre de la mesure des inégalités, sous le nom « d'axiome de décomposabilité », soulève quelques difficultés (17). En effet, ajouté aux axiomes précédents, l'axiome d'indépendance implique que si certains revenus d'une distribution donnée sont modifiés, l'évaluation de ce changement ne dépendra que des revenus qui ont été modifiés. En d'autres termes, la différence d'évaluation de deux distributions de revenus sera indépendante des parties communes de ces distributions. Considérons ainsi l'exemple proposé par Kolm [35]. Soit les distributions de revenus $(1, 4, 4)$ et $(2, 3, 4)$. Ces distributions ont même moyenne, et il y a une paire d'individus qui ont le même revenu dans la première, tandis qu'il n'y en a aucune dans la seconde. Aussi la distribution $(1, 4, 4)$ peut-elle être préférée à la distribution $(2, 3, 4)$. Mais considérons à présent les distributions $(1, 4, 3)$ et $(2, 3, 3)$: ici, au contraire, il y a une paire de revenus identique dans la seconde, et aucune dans la première. Or, si l'on adhère à l'axiome d'indépendance, on doit considérer que la différence d'évaluation entre $(1, 4, 4)$ et $(2, 3, 4)$ est la même qu'entre $(1, 4, 3)$ et $(2, 3, 3)$.

Le même problème peut être illustré d'une manière légèrement différente. Considérons les deux distributions suivantes : $X = (2300, 1000, 500, 450, 400)$ et $Y = (2000, 1000, 600, 550, 500)$. Effectuons un transfert de 1 F de l'individu ayant le deuxième revenu le plus élevé vers l'individu dont le revenu est immédiatement inférieur dans la distribution X (la distribution obtenue sera notée X'), et un transfert de 1 F égalemement de l'individu ayant le deuxième revenu le plus élevé vers l'individu le plus pauvre de la distribution Y (la distribution obtenue sera notée Y'). Dans les deux cas, on transfère 1 F d'un individu dont le revenu est 1 000 F à un individu dont le revenu est 500 F, le reste de la distribution restant inchangé. Si l'on respecte l'axiome d'indépendance, on doit considérer

(17) A strictement parler, cet axiome correspond à l'axiome de la chose sûre. Cependant, lorsque les probabilités (ici les fréquences) sont connues, l'axiome de la chose sûre est équivalent à l'axiome d'indépendance (cf. Fishburn et Wakker [25] pour une discussion détaillée). Dans le cadre de la théorie des choix sociaux, cet axiome correspond à l'axiome d'indépendance des alternatives non pertinentes (cf. Arrow [5]).

comme équivalent de passer de X à X′ ou de Y à Y′. Il peut sembler toutefois curieux qu'un transfert de l'individu ayant le deuxième revenu le plus élevé vers le plus pauvre soit considéré comme équivalent à un transfert de même montant de l'individu ayant le deuxième revenu le plus élevé vers l'individu dont le revenu est immédiatement inférieur.

Une étude d'Amiel et Cowell [3] permet de se faire une idée de la pertinence empirique de l'axiome d'indépendance. Ces auteurs ont en effet entrepris une étude (18) visant à évaluer le degré d'adhésion des individus à un certain nombre de principe de justice distributive. La méthode utilisée est la suivante. Tout d'abord, on demande aux personnes interrogées de classer des distributions qui respectent l'axiome dont on veut évaluer la pertinence. Puis on leur soumet l'axiome sous sa forme littérale. Enfin, on leur donne la possibilité de revenir sur leur première réponse. *L'axiome d'indépendance est loin d'obtenir un soutien unanime, puisque 41 % des personnes interrogées rejettent ce principe lorsqu'un exemple numérique leur est proposé, proportion qui s'élève à 56 % lorsqu'il leur est soumis sous une forme littérale.*

Cet axiome, ajouté aux précédents, implique (19) qu'il existe une fonction $u_n : D \to \mathbb{R}$, continue et croissante, unique à une transformation affine croissante près (20), telle que :

$$W_n(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_n(x_i)$$

En reprenant la terminologie proposée par Kolm, nous dirons que u_n est la *fonction d'évaluation individuelle* des membres de la société (21). Insistons sur le fait que cette représentation (et en particulier le résultat d'unicité) n'est valable que pour un n fixé : rien n'assure que, pour $n \neq n'$, $u_n(\cdot) = u_{n'}(\cdot)$.

3.2. Indice d'Atkinson et indice de Kolm-Pollak pour des populations de taille fixée

Il est à présent possible de caractériser les indices d'Atkinson-Kolm-Pollak (pour n fixé). Le résultat suivant est dû à Kolm [36], [33] et Atkinson [6].

(18) Cette étude a été menée auprès d'étudiants appartenant à des universités différentes, réparties dans plusieurs pays, et suivant des formations différentes (en particulier, l'échantillon comprend des non-économistes).

(19) Pour une démonstration, cf. par exemple Kolm [33].

(20) Soit u une fonction. La fonction v est égale à u *à une fonction affine croissante près* s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha u + \beta$.

(21) A strictement parler, en effet, on ne peut assimiler u_n à une *fonction d'utilité* puisque $u_n(x)$ est l'évaluation *impartiale et unanime* du bien-être procuré par un revenu x, lorsque les agents font abstraction de leur propre identité. (Il serait évidemment discutable de supposer que tous les individus ont la même fonction d'utilité). De plus, u_n dépend du nombre n d'agents — ce qui n'aurait gère de sens pour une fonction d'utilité individuelle.

Théorème 3 (Kolm, 1966 ; Atkinson, 1970) *Supposons que $\succeq_n$ vérifie sur D^n (avec $D = \mathbb{R}_{++}$) les axiomes 1 (préordre complet), 2 (continuité), 3 (impartialité), 4 (monotonie), 5 (λ-invariance), 7 (principe de transfert), 8 (indépendance), ainsi que la propriété 1 (normalisation). Alors l'indice relatif I_r est complètement caractérisé, à un paramètre près. Cet indice, appelé indice d'Atkinson, est défini sur D^n par :*

$$\begin{cases} IA_n(X) = 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\bar{X}}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \varepsilon \neq 1 \\ IA_n(X) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\bar{X}}\right)^{\frac{1}{n}}, \varepsilon = 1 \end{cases}$$

La fonction d'évaluation des distributions de revenus correspondante s'écrit :

$$\begin{cases} W_n^A(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}, \varepsilon \neq 1 \\ W_n^A(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i), \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Les fonctions d'évaluation individuelles sont donc des fonctions à élasticité de substitution constante, *i.e.*, $u_n(x) = (x^{1-\varepsilon})/(1-\varepsilon)$, si $\varepsilon \neq 1$, et $u_n(x) = \ln(x)$ pour $\varepsilon = 1$ (ε peut prendre différentes valeurs pour différentes valeurs de n). Le lien entre l'indice d'Atkinson et la fonction d'évaluation des distributions de revenus sur laquelle il est construit est, par définition :

$$IA_n(X) = 1 - \frac{R_n^A(X)}{\bar{X}} = 1 - \frac{u_n^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_n(x_i)\right)}{\bar{X}}$$

Si l'axiome 5 (λ-invariance) est remplacé par l'axiome 6 (μ-invariance), on obtient un indice d'inégalités absolu connu sous le nom d'indice de Kolm-Pollak.

Théorème 4 (Kolm, 1966) *Supposons que $\succeq_n$ vérifie sur D^n (avec $D = \mathbb{R}$) les axiomes 1 (préordre complet), 2 (continuité), 3 (impartialité), 4 (monotonie), 6 (μ-invariance), 7 (principe de transfert), 8 (indépendance), ainsi que la propriété 1 (normalisation). Alors l'indice absolu I_a est complètement caractérisé, à un paramètre près. Cet indice, appelé indice de Kolm-Pollak est défini par :*

$$IK_n(X) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{-\alpha(x_i - \bar{X})}\right), \quad \alpha > 0$$

La fonction d'évaluation des distributions correspondante est :

$$W_n^K(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} - e^{-\alpha x_i}, \quad \alpha > 0$$

Les fonctions individuelles d'évaluation sont des fonctions exponentielles de la forme $u_n(x) = - e^{-\alpha x}$. Le lien entre l'indice de Kolm-Pollak et la fonction d'évaluation sur laquelle il est construit est, par définition :

$$IK_n(X) = \bar{X} - R_n^K(X) = \bar{X} - u_n^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_n(x_i)\right)$$

Notons qu'il n'y a, *a priori* aucun lien entre la nature de l'indice (absolu ou relatif) et l'axiome d'invariance qu'il vérifie. Cependant, si un indice absolu est λ-invariant, sa forme relative diminuerait si l'on multipliait tous les revenus par une même constante, ce qui ne paraît pas avoir grand sens. De même, si un indice relatif est μ-invariant, sa forme absolue augmenterait si l'on augmentait tous les revenus d'un même montant, ce qui ne paraît guère plus satisfaisant. Il semble donc préférable de restreindre l'attention aux indices absolus μ-invariants et aux indices relatifs λ-invariants. Or Kolm [32] a montré que si l'axiome d'indépendance est vérifié, une même fonction d'évaluation ne peut pas conduire à un indice absolu μ-invariant et à un indice relatif λ-invariant. Sans doute est-ce là un nouvel argument en défaveur de l'axiome d'indépendance.

3.3. Indices d'Atkinson et de Kolm-Pollak pour des populations de taille variable

Jusqu'à présent, nous n'avons défini que des indices d'inégalités pour des populations de taille fixée. Il est naturel d'étendre ces indices à des populations de taille variable. Cela suppose, évidemment, que l'on impose un lien entre les différentes relations $\{\geq_n\}_n$ définies sur D^n, lorsque n varie dans $\mathbb{N}^*$ afin d'assurer l'existence d'une relation binaire $\geq$ sur $\mathbb{D}$, compatible (22) avec les relations $\{\geq_n\}_n$. Tel est, précisément, le rôle de l'axiome du « principe de population », introduit par Dalton [18]. Ce principe impose que les inégalités ne varient pas si la société est « répliquée » :

Axiome 9 *(principe de population). Pour tout* $k, n \in \mathbb{N}^*$, *et pour tout* $X \in D^n$,

$$\left(\underbrace{X, \ldots, X}_{K \text{ fois}}\right) \sim K$$

Cet axiome, ajouté à l'axiome 3 (impartialité) revient à supposer que deux distributions de revenus (éventuellement de tailles différentes) qui corres-

(22) Une relation $\geq$ sur $\mathbb{D}$ est *compatible* avec les relations $\{\geq_n\}_n$ définies sur D^n si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $X, Y \in D^n$, $X \geq_n Y$ implique $X \geq Y$.

pondent à la même fonction de répartition sont jugées équivalentes en termes d'inégalités. Lorsque principe de population est satisfait, l'extension des indices d'inégalités à la Atkinson-Kolm-Sen pour des populations de taille variable est immédiate : les fonctions u_n sont alors toutes identiques. On est ainsi ramené au modèle de von Neumann et Morgenstern [42], que l'on peut définir ainsi :

Définition 8 ***(Modèle de von Neumann et Morgenstern)*** *On dit qu'un décideur ayant une relation de préférence complète $\succeq$ sur $\mathbb{D}$ se comporte conformément au modèle de von Neumann et Morgenstern si, et seulement si, il existe une fonction $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, continue, strictement croissante et unique à une transformation affine croissante près, telle que $\succeq$ est représentée par :*

$$W(X) = \frac{1}{n(X)} \sum_{i=1}^{n(X)} u(x_i), \quad \forall X \in \mathbb{D}$$

On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 5 *Soit une relation $\succeq$* définie sur $\mathbb{D}$. *Cette relation vérifie les axiomes les axiomes 1 (préordre complet), 2 (continuité), 3 (impartialité), 4 (monotonie), 8 (indépendance) et 9 (principe de population) si, et seulement si, le décideur se comporte conformément au modèle de von Neumann et Morgenstern.*

Il est dès lors possible de construire des indices d'inégalité à la Atkinson-Kolm-Sen sur $\mathbb{D}$. En effet, la fonction R associée à W s'écrit alors, pour tout $X \in \mathbb{D}$:

$$R(X) = u^{-1}\left(\frac{1}{n(X)} \sum_{i=1}^{n(X)} u(x_i)\right)$$

L'indice d'Atkinson est alors défini sur $\mathbb{D}$ par :

$$IA(X) = \frac{\bar{X} - R(X)}{\bar{X}}$$

et l'on peut écrire de la même manière un indice de Kolm-Pollak sur $\mathbb{D}$.

Ces indices soulèvent un certain nombre de difficultés. Afin de simplifier l'exposition, nous concentrerons notre attention sur l'indice d'Atkinson. Toutefois, les problèmes que nous allons présenter concernent également l'indice de Kolm-Pollak.

3.4. L'indice d'Atkinson : paradoxes et controverses

3.4.1. Ordres sur les distributions et indice d'Atkinson

Il et naturel de se demander à quelles conditions un indice à la Atkinson-Kolm-Pollak (dans sa forme la plus générale, i.e., l'indice construit à partir des préférence d'un décideur se comportant conformément au modèle de von Neumann et Morgenstern) respecte les différents ordres sur les distributions que nous avons définis. Une première réponse nous est fournie par le théorème de Hardy-Littlewood-Polyà [28] :

Théorème 6 (Hardy, Littlewood et Polya, 1934) *Soit* $\tilde{X}$ *et* $\tilde{Y}$ *deux vecteurs de* $\bar{D}^n$ *ayant la même moyenne. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\tilde{Y} >_L \tilde{X}$

(ii) pour toute fonction strictement concave

$$u_n : D \to \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} u_n(\tilde{y}_i) > \sum_{i=1}^{n} u_n(\tilde{x}_i).$$

Ainsi, un décideur se comportant conformément au modèle de von Neumann et Morgenstern respecte le principe de transfert si et seulement si u est concave.

Toutefois, nous avons vu qu'il existait des situations où le principe de transfert pouvait paraître discutable. Est-il possible de recourir aux quasi-ordres différentiels absolus et relatifs afin d'éliminer ces situations dans le cadre du modèle de von Neumann et Morgenstern, en réduisant la classe des transferts jugés favorables ? La réponse, négative, est apportée par Chateauneuf [11] :

Théorème 7 (Chateauneuf, 1996) *Soit un décideur se comportant conformément au modèle de von Neumann et Morgenstern. On a alors les implications suivantes :*

(i) Le décideur respecte l'ordre différentiel absolu $\Rightarrow$ u *est concave*

(ii) Le décideur respecte l'ordre différentiel relatif à moyenne constante $\Rightarrow$ u *est concave*

Ainsi, on ne peut espérer qu'un indice à la Atkinson-Kolm-Pollak, vérifiant l'axiome 5 (λ-invariance) ou l'axiome 6 (μ-invariance) respecte l'ordre différentiel absolu ou l'ordre différentiel relatif sans qu'il ne respecte le principe de transfert. De ce point de vue, ces indices sont donc extrêmement rigides.

3.4.2. Aversion pour les inégalités et décroissance de l'utilité marginale individuelle

Selon Atkinson, le paramètre ε entrant dans la définition de l'indice IA reflète le degré d'aversion de la collectivité à l'égard des inégalités. En effet, l'influence d'un transfert d'un pauvre vers un riche sur le niveau de l'indice d'Atkinson sera d'autant plus faible que le paramètre ε sera petit. À la limite, pour $\varepsilon = 1$, un tel transfert n'aura aucun effet sur IA .

Mais alors se pose la question du choix de ce paramètre. Quelle valeur lui donner ? Et à partir de quels principes ? Une solution à ce problème a été proposée par Saint-Paul [53]. Ce dernier suppose que le choix de la fiscalité résulte de la maximisation d'une fonction objectif qui est une combinaison linéaire de $(1-IA)$ et d'une fonction représentant le coût des transferts (23). Ainsi, si l'on dispose des revenus avant et après impôts, il est possible d'en inférer la valeur de ε sous certaine hypothèses (24). Saint-Paul applique cette méthode aux données du Luxembourg Income Studies (25).

Un autre problème a été soulevé par Sen [58], [60] : plus le paramètre ε est faible, plus un transfert d'un pauvre vers un riche entraînera une augmentation forte de l'écart de bien-être (évalué par la fonction d'évaluation individuelle) entre ces deux individus. Par ailleurs, nous l'avons vu, plus le paramètre ε est faible, plus l'influence d'un transfert d'un pauvre vers un riche sur le niveau de l'indice d'Atkinson est faible. Ainsi, plus le paramètre ε est faible, plus un transfert d'un pauvre vers un riche accroît l'écart de bien-être (évalué par la fonction d'évaluation individuelle) entre ces individus, *et moins ce transfert accroît les inégalités mesurées par l'indice* d'Atkinson. Ce « paradoxe » soulève un véritable doute quant à la pertinence de l'indice d'Atkinson.

Hansson [27] (26) met en évidence une autre faiblesse de l'indice d'Atkinson. Pour une distribution *donnée* des revenus l'indice d'Atkinson décroît lorsque ε diminue. Mais plus ε est faible, plus l'écart entre les bien-êtres individuels (mesurés par les fonctions d'évaluation individuelles) est grand, comme le montre le graphique ci-dessous.

En effet, on a évidemment : $CD < BD < AD$. Ici encore, ce résultat paraît, à tout le moins, paradoxal. Il suggère, en tout état de cause, que la démarche adoptée par Atkinson n'est pas sans défauts (27).

Enfin, une dernière objection peut être émise à l'égard de l'indice d'Atkinson, objection qui, en un sens, recouvre les précédentes. Le coefficient ε mesure le degré de concavité de la fonction u . Or la concavité de u a une signification économique claire : elle implique que l'utilité (mesurée par la fonction d'évaluation individuelle) marginale du revenu est décroissante. Mais la concavité de u peut également recevoir une autre interprétation, à laquelle se réfère explicitement Atkinson pour justifier la forme de u : une fonction d'utilité concave implique en effet également, dans le cadre du

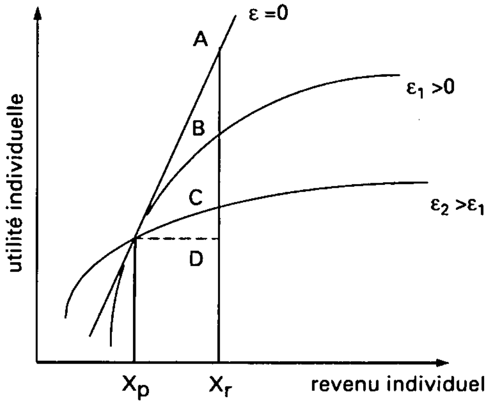
(23) Saint-Paul teste en réalité deux modèles. Le premier repose sur l'indice d'Atkinson, tandis que le second repose sur un indice d'Atkinson modifié, où u est une fonction exponentielle. Il remarque que ce dernier s'ajuste mieux aux données.

(24) L'une de ces hypothèses est « que, pour une société donnée, il existe des préférences collectives bien définies, c'est-à-dire un « décideur politique ». Nous interprétons alors les préférences du décideur non comme celles du parti politique au pouvoir, ou celles du votant médian, mais comme des « tendances lourdes » de la société. » (Saint-Paul, [53], p. 179).

(25) L'étude de Saint-Paul porte sur sept pays : États-Unis, Grande-Bretagne, Canada, Norvège, Suède, Suisse et République Fédérale d'Allemagne. Les données sont celles de 1979 ou 1981, selon les pays. Les résultats permettent de distinguer trois groupes de pays : le premier groupe, comportant la Grande-Bretagne, l'Allemagne et la Suède, est caractérisé par une forte aversion à l'égard des inégalités ; le second groupe, constitué par le Canada et la Norvège est caractérisé par une aversion moyenne à l'égard des inégalités ; enfin la Suisse et les États-Unis manifestent une faible aversion à l'égard des inégalités.

(26) Cité par Sen [60].

(27) On pourrait objecter que ε est un paramètre structurel, et que le faire varier n'a pas grand sens. Il n'en reste pas moins que, si l'on compare deux sociétés ayant des aversions pour les inégalités différentes et la même distribution de revenus, celle dont l'aversion pour les inégalités est la plus faible aura simultanément un indice d'Atkinson plus faible *et* des écarts entre les bien-êtres individuels (mesurés par les fonctions individuelles d'évaluation) plus importants.



Graphique 2. Le paradoxe de Hansson.

modèle d'espérance d'utilité de von Neumann et Morgenstern, une aversion à l'égard du risque. Cette aversion à l'égard du risque est ici interprétée comme une aversion à l'égard des inégalités. Le télescopage entre ces deux notions, l'une caractérisant l'attitude des agents à l'égard de la *richesse* (décroissance de l'utilité marginale du revenu), l'autre caractérisant leurs *jugements en matière de justice distributive* (aversion pour les inégalités), si elle n'est pas propre à la mesure des inégalités (c'est une propriété très générale du modèle de von Neumann et Morgenstern) prend ici une acuité toute particulière. En effet, il est impossible, dans ce cadre, de modifier l'*attitude* à l'égard des inégalités sans, du même coup, modifier les *inégalités* (en termes d'utilités individuelles) elles-mêmes. Les deux « paradoxes » relevés par Sen et Hansson proviennent essentiellement de cette difficulté. Ils seront, par conséquent, partagés par tous les indices d'inégalités construits dans le cadre du modèle de von Neumann et Morgenstern.

4. Indices de Gini généralisés

Au regard de ce qui précède, le coefficient de Gini semble posséder un certain nombre de propriétés intéressantes : en particulier, *il permet de générer à la fois des indices absolus* μ*-invariants et relatifs* λ*-invariants* (28). De plus, l'indice de Gini évite nombre d'écueils auxquels se trouvent confrontés les indices d'Atkinson et de Kolm-Pollak, et en particulier le lien, difficilement justifiable et quelque peu « pervers » d'un point de vue normatif, entre la décroissance de l'utilité marginale individuelle et l'aversion collective à l'égard des inégalités qui caractérise ces indices. Enfin, contrairement à l'indice d'Atkinson, l'indice de Gini permet de prendre en compte des revenus négatifs.

(28) Ce que, nous l'avons vu, l'axiome d'indépendance rend impossible.

Dans un article de 1970, Newbery [43] a démontré qu'il n'existait pas de fonction d'évaluation des distributions de revenus utilitariste (*i.e.*, de la forme $W_n(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_n(x_i)$) qui induise sur D^n un ordre compatible avec l'indice de Gini. Cela n'empêcha pas un certain nombre d'auteurs de tenter de donner un fondement axiomatique à l'indice de Gini. Pour cela, il parut nécessaire de généraliser cet indice. En effet, l'indice de Gini se caractérise par le fait qu'il accorde aux différents revenus des poids qui dépendent de leurs rangs dans la distribution des revenus, ces poids étant la suite des nombres impairs : le revenu le plus élevé se voit doté d'un poids égal à un, le revenu immédiatement inférieur, d'un poids égal à trois, etc. Ces poids paraissaient arbitraires, et donc difficiles à « rationaliser » (cf. cependant Ben-Porath et Gilboa [7]). Parmi les auteurs ayant contribué à cette étape, on compte, notamment, Weymark [64] (qui fut, en la matière, un pionnier), Donaldson et Weymark [23], Yitzhaki [67], Ebert [24]. Il fallut cependant attendre le développement des modèles d'utilité espérée dépendant du rang (RDEU pour Rank-Dependent Expected-Utility) pour voir émerger un modèle général de choix dans le risque susceptible de donner un fondement rationnel à l'indice de Gini et à ses généralisations. Les travaux de Yaari ([65], [66], en particulier, furent déterminants.

4.1. Indices de Gini et de Gini généralisés linéaires pour des populations de taille fixée

Nous avons vu que les indices à la Atkinson-Kolm-Sen vérifiaient un axiome d'indépendance particulièrement fort, axiome central du modèle de von Neumann et Morgenstern. Or, l'indice de Gini ne vérifie pas cet axiome. C'est ainsi que s'explique le résultat de Newbery.

Considérons, à présent l'axiome suivant, connu sous le nom d'axiome d'additivité comonotone (29) :

Axiome 10 *(Additivité comonotone) : Pour tout* $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \tilde{D}^n$,

$$\tilde{Y} \geq_n \tilde{X} \Leftrightarrow (\tilde{Y} + \tilde{Z}) \geq_n (\tilde{X} + \tilde{Z})$$

Rappelons que deux profils de revenus X et Y sont *comonotones* si, et seulement si, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$ (pour un départage adéquat des *ex-aequo*). En d'autres termes, deux profils de revenus sont comonotones si chaque individu y occupe le même rang (30). Les profils de revenus appartenant à $\tilde{D}^n$ sont tous deux-à-deux comonotones. De là

(29) On rappelle que $\tilde{X}$ est le profil de revenus, obtenu par une permutation de X, tel que $\tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2 \leq \ldots \leq \tilde{x}_n$.

(30) Soit $X \in D^n$, et $\tilde{X}$ le profil de revenus ordonné obtenu par la permutation $\sigma(\cdot)$ des composantes de X. Le *rang* de l'individu i dans X est $\sigma(i)$.

le nom de cet axiome. La notion de comonotonie (31) a été introduite par Dellacherie [20] et Schmeidler [54].

Reprenons l'exemple que nous avons donné lorsque nous avons commenté l'axiome d'indépendance. Soient donc les profils de revenus $X = (0, 0, 5)$, $Y = (0, 1, 1)$, $X' = (1, 0, 5)$ et $Y' = (1, 1, 1)$. Nous avons vu que si l'on respecte l'axiome d'indépendance et que l'on préfère X à Y, on doit également préférer X′ à Y′. Or $Y' - Y = X' - X = (1, 0, 0)$. Les profils X et $(X' - X)$ d'une part, et Y et $(Y' - Y)$ ne sont donc pas comonotones. Par conséquent, on peut préférer X à Y et X′ à Y′ sans entrer en contradiction avec l'axiome d'additivité comonotone. On ne peut cependant pas dire, en toute rigueur, que l'axiome d'additivité comonotone est plus faible que l'axiome d'indépendance, dans la mesure où il implique l'additivité de la relation de préférence, ce qui n'est pas le cas de l'axiome d'indépendance.

Weymark [64] a démontré le résultat suivant :

Théorème 8 (Weymark, 1981) *Soit une relation* $\geq_n$ *sur* D^n. *Cette relation respecte les axiomes 1 (préordre complet), 2 (continuité), 3 (impartialité) et 10 (additivité comonotone) si, et seulement si, il existe* $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *tel que pour tout* $X, Y \in D^n$,

$$Y \geq_n X \Leftrightarrow W_n^G(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{y}_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{x}_i = W_n^G(X)$$

De plus, le vecteur a *est unique à un facteur multiplicatif strictement positif près.*

En d'autres termes, si l'on substitue l'axiome d'additivité comonotone à l'axiome d'indépendance standard, on obtient des fonctions d'évaluation des distributions de revenus *linéaires*. Si l'on suppose de plus que l'axiome 4 (monotonie) est vérifié, $a \in \mathbb{R}^n_{++}$. Enfin, les poids a_i étant définis à un facteur près, on peut sans perte de généralité imposer : $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. On obtient finalement la fonction d'évaluation des distributions de revenus suivante :

$$W_n^G(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{x}_i,\ a \in \mathbb{R}^n_{++},\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \qquad (3)$$

Comme W_n^G est linéaire, $R_n^G(X) = W_n^G(X)$. L'indice (relatif) de Gini peut alors s'écrire :

$$IRG_n(X) = 1 - \frac{W_n^G(X)}{\bar{X}}$$

(31) Sur la notion de comonotonie et ses implications en économie, cf. Chateauneuf, Cohen et Kast [13].

On peut également définir un indice *absolu* de Gini en posant :

$$IAG_n(X) = \bar{X} - W_n^G(X)$$

L'indice de Gini traditionnel correspond, pour n fixé, à la séquence de poids $a_i = 2(n-i)+1$. Remarquons qu'en vertu de l'axiome d'additivité comonotone, l'indice de Gini généralisé absolu est additif pour des distributions de revenus comonotones : si X et Y sont comonotones, $IAG(X+Y) = IAG(X) + IAG(Y)$. On peut, ainsi que le remarque Denneberg [22], rapprocher cette propriété de celle de la variance, qui est additive pour des variables aléatoires indépendantes.

4.2. Indices de Gini généralisés linéaires pour des populations de taille variables

Approfondissant la voie ouverte par Weymark [64], Ebert [24] a affiné la classe des indices de Gini généralisés, afin d'assurer la cohérence des ordres $\{\succeq_n\}_n$. Pour cela, il utilise un axiome d'agrégation portant directement sur les fonctions R_n.

Notons $\{R_n\}_n$ la suite des fonctions R_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$. L'axiome d'Ebert est le suivant (32) :

Axiome 11 *(Agrégation) Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$:

$$\forall \hat{X} \in \hat{D}^n, \quad R_n(\hat{X}) = R_n(R_k(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k)\, 1_k, \hat{x}_{k+1}, \ldots, \hat{x}_n)$$

Ebert (33) obtient alors le résultat suivant (34) :

Théorème 9 (Ebert, 1988) *Soit une relations* $\succeq$ *sur* $\mathbb{D}$. *Si les axiomes 1 (préordre complet), 2 (continuité), 3 (impartialité), 5 (λ-invariance) pour la forme relative de l'indice, 6 (μ-invariance) pour la forme absolue de l'indice, 7 (principe de transfert), 10 (additivité comonotone) et 11 (agrégation) sont vérifiés, alors* W_n^G *est de la forme :*

$$W_n^G(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \hat{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \; a_1 = 1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$$

(32) On rapelle que $\hat{X}$ est le profil de revenus, obrenu par une permutation de X, tel que $\hat{x}_1 \geq \hat{x}_2 \geq \ldots \geq \hat{x}_n$.

(33) En réalité, le théorème d'Ebert est un peu plus général, car il adopte un axiome d'indépendance plus faible, qui n'implique pas l'additivité de W_n^G. Cependant, le théorème énoncé se déduit directement du théorème d'Ebert.

(34) Bossert [10] obtient un résultat similaire avec un axiome d'agrégation légèrement différent.

De plus, la séquence des poids $\{a_i\}_i$ *est uniques à un facteur strictement positif près.*

Ceci permet de construire des indices de Gini généralisés pour des populations de tailles différentes à partir d'une unique suite de poids $\{a_i\}_i$. On appellera plus généralement l'ensemble des indices de Gini généralisés possédant cette propriété les « indices de Gini à série de poids unique » *(Single-Series Gini).*

Donaldson et Weymark [23] proposèrent d'ajouter aux axiomes précédents le principe de population. Ils obtinrent la caractérisation suivante (cf. également Yitzhaki [67] et Safra et Segal [52]) :

Théorème 10 (Donaldson et Weymark, 1980) *Soit une relation* $\succeq$ *sur* $\mathbb{D}$. *Cette relation respecte les axiomes 1 (préordre complet), 2 (continuité), 3 (impartialité), 7 (principe de transfert), 9 (principe de population), 10 (additivité comonotone) et 11 (agrégation) si, et seulement si, il existe* $\xi \geq 1$ *tel que* $\succeq$ est représentée sur $\mathbb{D}$ *par :*

$$W^{SG}(X) = \sum_{i=1}^{n(X)} \left[\left(\frac{n(X)-i+1}{n(X)}\right)^{\xi} - \left(\frac{n(X)-i}{n(X)}\right)^{\xi} \right] \tilde{x}_i, \xi \geq 1$$

La classe d'indices ainsi définie est appelée par Donaldson et Weymark [23] classe des S-Ginis. Le principal intérêt des S-Ginis est qu'ils ne dépendent que d'un paramètre (ξ). Plus ξ grand, plus l'indice S-Gini est sensible aux inégalités. Les deux extrêmes sont $\xi = 1$, pour lequel l'indice S-Gini correspond à un critère purement utilitariste, et $\xi \to +\infty$, pour lequel l'indice S-Gini correspond à un critère « rawlsien ».

Enfin, notons que ces caractérisations supposent toutes que le principe de transfert est satisfait. Cette hypothèse, ainsi que l'axiome d'agrégation, peuvent être jugées très exigeantes. Il est cependant possible de les abandonner. On obtient alors le modèle de Yaari [65] :

Définition 9 (Modèle de Yaari) *On dit qu'un décideur ayant une relation de préférence complète* $\succeq$ *sur* $\mathbb{D}$ *se comporte conformément au modèle de Yaari si, et seulement si, il existe une unique fonction* $f: [0,1] \to [0,1]$, *continue, strictement croissante et vérifiant* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$, *telle que* $\succeq$ *est représentée par :*

$$W(X) = \sum_{i=1}^{n(X)} \left[f\left(\frac{n(X)-i+1}{n(X)}\right) - f\left(\frac{n(X)-i}{n(X)}\right) \right] \tilde{x}_i, \quad \forall X \in \mathbb{D}$$

Le modèle de Yaari (35), appelé aussi modèle dual prend en compte le fait que les revenus sont pondérés non par leur fréquence (comme dans le

(35) Le théorème de représentation de Yaari repose essentiellement sur un axiome d'additivité comonotone. Cependant, cette représentation est obtenue dans un cadre plus riche que le nôtre (Yaari considère l'ensemble de toutes les ditributions de probabilités, et non seulement les distributions à probabilités — ou fréquences — rationnelles). Les axiomes de continuité et de monotonicité doivent donc être refomulés en conséquence.

modèle de von Neumann et Morgenstern), mais par une transformation (non nécessairement linéaire) des fréquences cumulées. Cette transformation des fréquences représente l'attitude à l'égard des inégalités décideur. La fonction d'évaluation des distributions sur laquelle reposent les indices S-Ginis n'est rien d'autre qu'une fonctionnelle de Yaari, avec $f(p) = p^{\xi}$. Enfin, notons que Ebert [24] a proposé une axiomatisation d'un cas particulier du modèle de Yaari, où f est strictement convexe, en supposant que le décideur vérifiait le principe de transfert.

Dès 1987, Yaari [65] remarquait ainsi que ce modèle pouvait donner un fondement rationnel à l'indice de Gini (36). Plus encore, il notait que,

> « tout comme les indices d'égalité (ou d'inégalité) appartenant à la classe des indices de Gini ne sont pas rationalisables dans le cadre de la théorie de l'utilité, les indices d'égalité (ou d'inégalité) d'Atkinson (1970) ne sont pas rationalisables dans le cadre de la théorie duale » (Yaari [65], p. 106).

Ce point lui parut d'ailleurs suffisamment important pour qu'il y consacre un article un an plus tard [66]. D'un point de vue empirique, une question demeure largement ouverte : comment déterminer la fonction de distorsion des fréquences cumulées de la distribution des revenus ? Ce point a été abordé par Yaari [66]. Ce dernier suppose que le décideur public applique la règle du « sacrifice fiscal absolu égal » (37), c'est-à-dire calcule les impôts de manière à imposer à tous les individus la même perte d'utilité, étant entendu que cette dernière est évaluée par le décideur (38). En notant t_i le montant d'impôts payés par l'individu i, le sacrifice imposé à cet individu, évalué par le décideur, est :

$$a_i t_i = \left[f\left(\frac{n-i+1}{n}\right) - f\left(\frac{n-i}{n}\right) \right] t_i$$

puisque $u(x_i) = x_i$. La contrainte $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ permet alors de déduire f du système fiscal observé, en posant $a_i t_i =$ constante pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Dans ce cadre, la fiscalité effectivement mise en place *révèle* l'attitude du décideur à l'égard des inégalités.

(36) Le rapport entre l'indice de Gini (généralisé) et le modèle RDEU est évident si l'on remarque que l'indice de Gini (généralisé) est une fonctionnelle linéaire sur des cônes de vecteurs comonotones, qui n'est rien d'autre qu'une intégrale de Choquet par rapport à une mesure non additive. Or, les fonctionnelles représentant les préférences dans le modèle RDEU sont, précisément, des intégrales de Choquet (sur les intégrales de Choquet, cf. par exemple Schmeidler [54], Denneberg [21], Cohen et Tallon [17]). Soulignons, encore une fois, le rôle central que joue ici la propriété de comonotonicité.

(37) Le principe du « sacrifice fiscal absolu égal » a été proposé par J. S. Mill [38], et repris récemment par Richter [49] et Young [68] notamment. Cf. Musgrave [40] pour une présentation de l'histoire de ce principe.

(38) Il est donc, en toute rigueur, nécessaire de supposer que le décideur public représente convenablement les agents lorsque ceux-ci font abstraction de leur propre identité. On peut rapprocher la méthode proposée ici de celle utilisée par Saint-Paul [53].

4.3. Indices de Gini généralisés non linéaires

L'hypothèse de linéarité des fonctions d'évaluation individuelles peut être abandonnée, moyennant l'affaiblissement de l'axiome d'additivité comonotone. On obtient alors le modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang (modèle RDEU) :

Définition 10 ***(Modèle RDEU)*** *On dit qu'un décideur ayant une relation de préférence complète* $\succeq$ *sur* $\mathbb{D}$ *se comporte conformément au modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang (RDEU) si, et seulement si, il existe une unique fonction* $f: [0,1] \to [0,1]$, *continue, strictement croissante, vérifiant* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$, *et une fonction* $u : D \to \mathbb{R}$, *unique à une transformation affine croissante près, continue et strictement croissante, telles que* $\succeq$ *est représentée par :*

$$W(X) = \sum_{i=1}^{n(X)} \left[f\left(\frac{n(X) - i + 1}{n(X)}\right) - f\left(\frac{n(X) - i}{n(X)}\right) \right] u(\tilde{x}_i), \quad \forall X \in \mathbb{D}$$

Il existe de nombreuses axiomatisations de ce modèle, dans des cadres variés (cf. Quiggin [46], Chew et Epstein [16], Segal [55], [57] [56], Wakker [63], Quiggin et Wakker [47], Nakamura [41]).

L'axiomatisation que nous présentons ici est due à Chateauneuf [12]. Dans ce qui suit, nous noterons l'ensemble des distributions de revenus de la forme : $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k, \ldots, \tilde{x}_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ avec $p_i > 0, \sum_i p_i = 1$, et $\tilde{x}_1 \leq \ldots, \tilde{x}_k \leq \ldots \leq \tilde{x}_n$, où p_i % des individus ont le revenu $\tilde{x}_i$ (39). Chateauneuf introduit les deux axiomes suivants :

Axiome 12 *(Indépendance comonotone). Pour tout* $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{D}^n$, *tels que* $\tilde{x}_k = \tilde{y}_k$, *et pour tout* z *tel que* $\tilde{x}_{k-1} \leq z \leq \tilde{x}$ *et* $\tilde{y}_{k-1} \leq z \leq \tilde{y}_{k+1}$

$$(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k, \ldots, \tilde{x}_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n) \succeq (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k, \ldots, \tilde{y}_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

$$\Rightarrow (\tilde{x}_1, \ldots, z, \ldots, \tilde{x}_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n) \succeq (\tilde{y}_1, \ldots, z, \ldots, \tilde{y}_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

Cet axiome signifie que si deux profils de revenus comportent un revenu identique *occupant le même rang*, l'ordre entre ces distributions n'est pas modifié si l'on modifie ce revenu commun sans que cela affecte l'ordre des revenus. Il s'agit donc véritablement de la contrepartie comonotone de l'axiome 8 (axiome d'indépendance).

Le second axiome introduit par Chateauneuf porte sur le mélange comonotone des fonctions de répartition des distributions de revenus. Soit $X = (x, y ; p, 1-p)$ et $X' = (x', y' ; p', 1-p')$. On appelle *mélange* de X et de X′ le profil de revenu que l'on obtient en attribuant le profil de revenu X

(39) Notons que p n'est pas nécessairement un nombre rationnel. Par conséquent, le cadre d'analyse de Chateauneuf est, encore une fois, plus riche que le nôtre.

à une part λ de la population ($\lambda \in [0,1]$) , et le profil de revenu X' au reste de la population (40). On note un tel profil de revenu : $\lambda X + (1-\lambda) X'$.

Axiome 13 *(Indépendance par rapport aux mélanges comonotones). Soit* $x, y, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *et* $\alpha \in [0,1]$

1. Si $x \leq a, y \leq b, x \leq c, y \leq d$,

$$\begin{cases} X_1 = (x, a ; p, 1-p) \sim (y, b ; p, 1-p) = Y_1 \\ X_2 = (x, c ; p, 1-p) \sim (y, d ; p, 1-p) = Y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \sim \lambda Y_1 + (1-\lambda) Y_2, \forall \lambda \in [0, 1]$$

2. Si $a \leq x, b \leq y, c \leq x, d \leq y$,

$$\begin{cases} X_1 = (a, x; p, 1-p) \sim (b, y; p, 1-p) = Y_1 \\ X_2 = (c, x; p, 1-p) \sim (d, y; p, 1-p) = Y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \sim \lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Il nous semble que cet axiome, construit initialement pour des loteries, s'applique particulièrement bien aux distributions de revenus. En effet, supposons que la société soit indifférente entre les distributions de revenus $X_1 = (x, a ; a, 1-p)$ et $Y_1 = (y, b ; b, 1-p)$ d'une part, et $X_2 = (x,c ; p,1-p)$ et $Y_2 = (y,d ; p,1-p)$ d'autre part, ces distributions étant toutes comonotones (de là le nom de l'axiome). Considérons maintenant la situation suivante : la population est séparée en deux groupes, la distribution des revenus dans le premier groupe étant X_1 , et celle du second groupe étant X_2 . Il en résulte une distribution globale des revenus X, qui est un *mélange* de X_1 et de X_2 et cette opération n'affecte pas les revenus individuels des p % les plus riches (respectivement des p % les plus pauvres), qui est le même dans les deux sous-populations et dans la population totale. De la même façon, Y est la distribution des revenus d'une population séparée en deux groupes, dans les mêmes proportions que pour la population précédente, l'un ayant une distribution de revenus Y_1 et l'autre une distribution de revenus Y_2 , telles que les revenus individuels des p % les plus riches (respectivement des p % les plus pauvres) est le même dans les deux sous-populations et dans la population totale. L'axiome d'indépendance par rapport au mélange comonotone implique alors que cette société est indifférente entre les distributions X et Y .

Naturellement, l'axiome d'indépendance implique ces deux axiomes. En d'autre termes, tous les indices d'inégalités construits à partir des préféren-

(40) Le profil de revenus obtenu est :

$$(x, y, x', y' ; \lambda p, \lambda(1-p), (1-\lambda)p', (1-\lambda)(1-p'))$$

ces d'un décideur se comportant conformément au modèle de von Neumann et Morgenstern vérifie les axiomes d'indépendance comonotone et d'indépendance par rapport au mélange comonotone.

En ajoutant un axiome de monotonie et un axiome de continuité adaptés à son cadre d'analyse Chateauneuf caractérise les décideurs qui se comportent conformément au modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang. Notons qu'Ebert [24] propose également une axiomatisation du modèle RDEU dans un cas particulier (u concave et de la forme $u(x) = -e^{-\gamma x}$, $u(x) = \ln(x)$, ou $u(x) = \frac{1}{\varepsilon} x^{\varepsilon}$ avec $\varepsilon \leq 1$ et f convexe, en supposant que le décideur satisfait le principe de transfert, et que l'indice relatif (respectivement : absolu) construit à partir des préférences du décideur vérifie l'axiome 5 (λ –invariance) (respectivement l'axiome 6 (μ – invariance)).

Une démarche naturelle, proposée par Ebert [24] et Chateauneuf [11], consiste à construire, à partir de cette représentation des préférences, un indice d'inégalités similaire aux indices d'Atkinson-Kolm-Sen. Le « revenu égal équivalent » est alors défini par :

$$R^{GSG}(X) = u^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{n(X)-i+1}{n(X)}\right) - f\left(\frac{n(X)-i}{n(X)}\right)\right]u(\tilde{x}_i)\right)$$

On obtient finalement l'indice suivant (que nous appellerons « indice de Gini super-généralisé »), en ajoutant l'axiome 5 et la propriété 1 (normalisation) :

$$I(X) = 1 - \frac{R^{GSG}(X)}{\bar{X}}$$

Il s'agit bien d'une généralisation de l'indice de Gini généralisé, que l'on obtient si $u(x) = x$. Notons que l'indice d'Atkinson est un cas particulier de l'indice de Gini super-généralisé, où $f(z) = z$ et u est une fonction à élasticité de substitution constante. Ainsi, il est non seulement possible de donner à l'indice de Gini un fondement similaire à ceux des indices d'Atkinson-Kolm-Sen (à savoir un modèle de décision dans le risque), mais de subsumer l'indice de Gini sous une classe plus générale, celle des indices de Gini généralisés.

4.4. Indices de Gini généralisés et ordres sur les distributions

L'un des principaux intérêts des modèles non-additifs (modèle de Yaari et modèle RDEU) est leur très grande souplesse. En particulier, nous avons vu qu'il était impossible, pour un décideur se comportant conformément au modèle de von Neumann et Morgenstern, de respecter le quasi-ordre différentiel absolu ou relatif sans respecter également le principe de transfert. Ce n'est pas le cas avec les modèles non additifs, ainsi que le montrent les résultats suivants. Dans la mesure où le principe de transfert et le quasi-ordre différentiel absolu ne concernent que des distributions de même moyenne, il suffit de caractériser l'attitude du décideur à l'égard de ces principes pour obtenir la caractérisation correspondante pour les indices d'inégalités construits sur les préférences d'un tel décideur. En revanche, le quasi-ordre différentiel relatif pouvant concerner des distribution de moyennes différentes, les propriétés d'invariance vont jouer un rôle crucial dans la caractérisation des indices qui respectent ce quasi-ordre. En conséquence, nous énoncerons les résultats concernant le principe de transfert et le quasi-ordre différentiel absolu directement sur les préférences du décideur, tandis que ceux concernant le quasi-ordre différentiel relatif porteront sur l'indice relatif, vérifiant l'axiome 5 (λ –invariance) construit à partir des préférences du décideur.

Théorème 11 (Yaari, 1987) *Soit un décideur se comportant conformément au modèle de Yaari. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le décideur respecte le principe de transfert

(ii) f *est convexe.*

Théorème 12 (Chateauneuf, 1996) *Soit un décideur se comportant conformément au modèle de Yaari. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le décideur respecte le quasi-ordre différentiel absolu

(ii) $f(p) \leq p, \forall p \in [0, 1]$.

Évidemment, $f(p) \leq p$ pour tout p de $[0, 1]$ implique que f est convexe (rappelons que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$). La réciproque, en revanche, est fausse. Ainsi, un décideur se comportant conformément au modèle de Yaari peut respecter le quasi-ordre différentiel absolu sans pour autant respecter le principe de transfert.

Afin de donner la caractérisation des indices relatifs respectant le quasi-ordre différentiel relatif construits à partir des préférences d'un décideur se comportant conformément au modèle de Yaari, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 11 *Soit* $f: [0, 1] \to [0, 1]$. *On dit que* f *est étoilée au-dessus en 0 si* $\frac{f(p)}{p}$ *est croissante sur* $[0, 1]$.

On peut alors énoncer le résultat suivant, démontré par Chateauneuf [11] :

Théorème 13 (Chateauneuf, 1996) *Soit un décideur se comportant conformément au modèle de Yaari, et* I_r *l'indice relatif vérifiant l'axiome 5 (λ-invariance) construit à partir de ses préférences. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'indice I_r *respecte le quasi-ordre différentiel relatif*

(ii) f*est étoilée au-dessus en 0.*

Toute fonction f convexe est étoilée au-dessus en zéro. La réciproque n'est cependant pas vraie. Par conséquent, un indice relatif vérifiant l'axiome 5

(λ-invariance) construit à partir des préférences d'un décideur se comportant conformément au modèle de Yaari peut respecter le quasi-ordre différentiel relatif sans pour autant respecter le principe de transfert. En revanche, si f est étoilée au-dessus en zéro, $f(p) \leq p$ pour tout p dans $[0, 1]$ (rappelons que $f(1) = 1$ par définition). Ainsi, un indice construit à partir des préférences d'un décideur se comportant conformément au modèle de Yaari ne pourra respecter le quasi-ordre différentiel relatif sans, du même coup, respecter le quasi-ordre différentiel absolu.

Des résultats similaires sont disponibles pour le modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang. Tout d'abord, Chew, Karni et Safra [15] caractérisèrent les fonctionnelles représentant les préférences d'un décideur se comportant conformément au modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang et respectant le principe de transfert.

Théorème 14 (Chew, Karni et Safra, 1987) *Soit un décideur se comportant conformément au modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le décideur respecte le principe de transfert

(ii) u *est concave et* f *est convexe.*

Afin de caractériser les fonctionnelles représentant les préférences d'un décideur se comportant conformément au modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang qui respecte le quasi-ordre différentiel absolu, Chateauneuf, Cohen et Meilijson [14] introduisirent les définitions suivantes :

Définition 12 *Soit un décideur se comportant conformément au modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang, avec une fonction d'utilité* u *et une fonction de distorsion des fréquences cumulées. On définit :*

(i) $P_f = \inf_{0<v<1} \left[\left(\frac{1-f(v)}{v}\right) / \left(\frac{1-v}{v}\right) \right]$, *appelé indice de pondération*

(ii) $G_u = \sup_{y \leq x} \frac{u'(x)}{u'(y)}$, *appelé indice de non-concavité.*

En particulier, $P_f \geq 1$ si $f(p) \leq p$ pour tout $p \in [0, 1]$, et $G_u = 1$ si et seulement si u est concave (G_u est toujours supérieur ou égal à 1). Chateauneuf, Cohen et Meilijson [14] ont montré le résultat suivant :

Théorème 15 (Chateauneuf, Cohen et Meilijson, 1997) *Soit un décideur se comportant conformément au modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le décideur respecte le quasi-ordre différentiel absolu

(ii) $f(p) \leq p, \forall p \in [0, 1]$ *et* $P_f \geq G_u$.

Enfin, il n'existe pas, à ce jour, de caractérisation de tous les indices relatifs construits à partir des préférences d'un décideur se comportant conformément au modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang et vérifiant l'axiome 5 (λ-invariance) qui respectent le quasi-ordre différentiel relatif. En revanche, une telle caractérisation a été proposée par Chateauneuf [11] dans le cas où $u(x) = \ln(x)$.

Théorème 16 (Chateauneuf, 1996) *Soit un décideur se comportant conformément au modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang, avec* $u(x) = \ln(x)$, *et* I_r *l'indice relatif vérifiant l'axiome 5 (*λ*-invariance) construit à partir de ses préférences. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'indice I_r *respecte le quasi-ordre différentiel relatif*

(ii) $f(p) \leq p, \forall p \in [0, 1]$.

On comprend mieux, ainsi, l'intérêt des modèles non-additifs, *qui permettent une description extrêmement fine de l'opinion de la société en matière de justice distributive, et qui semblent donc particulièrement utiles pour déterminer l'adéquation des politiques de redistribution à des objectifs en matière de justice sociale.*

Par ailleurs, nous avons vu qu'il était impossible, dans le cas des indices d'Atkinson-Kolm-Sen, de modifier l'aversion de la société à l'égard des inégalités sans, du même coup, modifier les inégalités de bien-être individuels (mesurés par les fonctions d'évaluation individuelles) elles-mêmes. Cette difficulté ne se présente pas avec l'indice de Gini généralisé. En effet, l'aversion de la société à l'égard des inégalités est représentée par la structure des poids. Modifier cette dernière ne change rien aux bien-êtres individuels.

Enfin, le lien difficilement justifiable entre la décroissance du bien-être (mesuré par les fonctions d'évaluations individuelles) marginal individuel et l'aversion collective à l'égard des inégalités, qui est sans doute du point de vue normatif l'une des propriétés les plus gênantes de l'approche d'Atkinson, Kolm et Sen, est ici relâché.

5. Conclusion

La recherche d'une mesure objective des inégalités, sur le modèle des mesures des grandeurs physiques, est vaine : la mesure des inégalités dépend, en effet, de l'opinion des membres de la société sur la justice. A ce titre, l'utilisation de simples indices statistiques de dispersion ne peut être satisfaisante, puisqu'elle occulte cette inévitable prise de position. Il est donc souhaitable que les opinions qui sous-tendent les mesures des inégalités soient aussi explicites que possibles. La démarche axiomatique constitue sans doute, à cet égard, une approche satisfaisante. C'est cependant une démarche exigeante : en particulier, la validité d'un indice repose sur l'adhésion *unanime* des membres de la société aux opinions sur lesquelles il est fondé, et qui sont représentées par des axiomes.

Nous nous sommes donc attachés à présenter en détail la signification et les conséquences des différents axiomes qu'est susceptible de vérifier un indice d'inégalités. Nous avons tout particulièrement insisté sur l'axiome d'indépendance. Ce principe paraît contestable : il implique, en effet, que l'ordre entre deux distributions de revenus ne dépend pas de la partie commune à ces deux distributions. Ajouté aux autres axiomes caractérisant les indices d'inégalités à la Atkinson-Kolm-Sen, l'axiome d'indépendance implique l'évaluation de la variation des inégalités engendrée par la modification du revenu d'un individu ne dépend pas du *rang* qu'occupent ces individus dans la distributions des revenus. De fait, les études empiriques (par exemple celle d'Amiel et Cowell [3] ne permettent pas de mettre en évidence une unanimité sur la validité de cet axiome.

D'un point de vue plus formel, il est possible de distinguer deux classes d'indices d'inégalités, selon qu'ils respectent, ou non, l'axiome d'indépendance. Les premiers sont les indices à la Atkinson-Kolm-Sen, et reposent implicitement sur le modèle de décision dans le risque de von Neumann et Morgenstern (modèle d'espérance d'utilité). Les seconds sont les indices de Gini, Gini généralisés et Gini super-généralisés, et reposent sur le modèle de Yaari ou de Quiggin (modèle d'espérance d'utilité dépendant du rang). L'exploration systématique des propriétés de ces derniers reste, pour une large part, à faire. Toutefois, il est apparu clairement que ces indices permettaient une description beaucoup plus riche des opinions de la société en matière de justice distributive que les indices d'Atkinson-Kolm-Sen. Ils semblent donc particulièrement bien adaptés à l'évaluation de l'adéquation des politiques redistributives à des objectifs en matière de justice sociale.

Références

[1] ALLAIS M. [1953], Le comportement de l'homme rationnel dans le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Économetrica*, 21 : 503-546.

[2] AMIEL T. and COWEL F. [1993], Monotonicity, dominance and the pareto principle. *Discussion Paper DARP-6*.

[3] AMIEL Y. and COWELL F. [1992], Measurement of income inequality : experimental test by questionnaire. *Journal of Public Economics*, 47 : 3-26.

[4] ARISTOTE [1994], *Éthique à Nicomaque*. Vrin, Paris.

[5] ARROW K. [1951], Social choice and individual values. Wiley, New York.

[6] ATKINSON A. B. [1970], On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, 2 : 244-263.

[7] BEN-PORATH E. and GILBOA I. [1994], Linear measures, the gini index, and the income-equality trade-off. *Journal of Economic Theory*, 64 : 443-467.

[8] BICKEL P. J. and LEHMANN E. L. [1976], Descriptive statistics for non-parametric models, iii. dispersion. *Annals of Statistics*, 4 : 1139-1158.

[9] BICKEL P. J. and LEHMANN E. L. [1979], Descriptive statistics for non-parametric models, iv. spreads. In Jureckova, editor, *Contributions to Statistics*, Dordrecht, Reidel.

[10] BOSSERT W. [1990], An axiomatization of the single-series ginis. *Journal of Economic Theory*, 50 : 82-92.

[11] CHATEAUNEUF A. [1996], Decreasing inequality : as approach through non-additive models. *Cahiers EcoMaths, Université Paris I*, 96.58, presented at FUR (1994).

[12] CHATEAUNEUF A. [1999], Comonotonicity axioms and the rank-dependent expected utility theory for arbitrary consequences. *Journal of Mathematical Economics*, 32 : 21-45.

[13] CHATEAUNEUF A., COHEN M. and KAST R. [1997], Comonotone random variables in economics : a review of some results. *Cahiers EcoMaths*, (97.32). Université Paris 1.

[14] CHATEAUNEUF A., COHEN M., and MEILIJSON I. [1997], More pessimism than greediness : A characterization of monotone risk aversion. *Cahiers EcoMaths Université Paris 1*, (97.53).

[15] CHEW H., KARNI E., and SAFRA Z. [1987], Risk aversion in the theory of expected utility with rank dependant probabilities. *Journal of Economic Theory*, 42 : 370-381.

[16] CHEW S. and EPSTEIN L. [1989], A unifying approach to axiomatic non-expected utility theory. *Journal of Economic Theory*, 49 : 207-240.

[17] COHEN M. and TALLON J.-M. [2000], Décisions dans le risque et l'incertain : l'apport des modèles non-additifs. *Revue d'économie politique*, 5, 2000.

[18] DALTON H. [1920], The measurement of the inequality of incomes. *Economic Journal*, 30 : 348-361.

[19] DEBREU G. [1959], *Theory of Value*. John Wiley, New York.

[20] DELLACHERIE C. [1970], Quelques commentaires sur les prolongements de capacités. In *Séminaire de Probabilités 1969/1970, Strasbourg*, pages 77-81. L.N. in Math. 191, Spinger Verlag.

[21] DENNEBERG D. [1994], *Non-additive measures and integral*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[22] DENNEBERG D. [1998], Non-additive measure and integrals, basic concepts and their role for applications. *mimeo, preliminary draft, Universitat Bremen.*

[23] DONALDSON D. and WEYMARK J. [1980], A single-parameter generalization of the gini indices of inequality. *Journal of Economic Theory*, 22 : 67-86.

[24] EBERT U. [1988], Measurement of inequality : an attempt at unification and generalization. *Social Choice and Welfare*, 5 : 147-169.

[25] FISHBURN P. and WAKKER P. [1993], The invention of the independence condition for preferences. *mimeo.*

[26] FLEURBAEY M. [1996] *Théories économiques de la justice*. Économica, Paris.

[27] HANSSON B. [1977], The measurement of social inequality. In R. Butts and J. Hintikka, editors, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Dordrecht, Reidel.

[28] HARDY G. H., LITTLEWOOD J. E. and POLYA G. [1934]. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge.

[29] HARSANYI J. [1953], Cardinal utility in welfare economics and in the theory of risk-taking. *Journal of Political Economics*, 61 : 434-435.

[30] HARSANYI J. [1955], Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons if utility. *Journal of Political Economy*, 63 : 309-321.

[31] HOBBES [1971], *Le Léviathan*. Sirey, Paris.

[32] KOLM S.-C. [1969], The optimal production of social justice. In J. Margolis and S. Guitton, editors, *Public Economics*, London, MacMillan.

[33] KOLM S.-C. [1976], Unequal inequalities I. *Journal of Economic Theory*, 12 : 416-442.

[34] KOLM S.-C. [1976], Unequal inequalities II. *Journal of Economic Theory*, 13 : 82-111.

[35] KOLM S.-C. [1995], *Modern Theories of Justice*. MIT Press, Cambridge (Mass.).

[36] KOLM S.-Ch. [1966], The optimal production of justice. Paper presented at the 1966 conference of the International Economic Association on Public Economics in Biaritz. Published in the proceedings of this conference, « Économie Publique » CNRS, Paris, 1968, and « Public Economics », MacMillan.

[37] MARSHALL A. and OLKIN I. [1979], *Inequalities : Theory of Majorization and its Applications*. Academic Press, New York.

[38] MILL J. S. [1848], *Principles of Political Economics*. Longmans Green (1917), London.

[39] MOYES P. [1994], Inequality reducing and inequality preserving transformations of incomes : symetric and individualistic transformations. *Journal of Economic Theory*, 63 : 271-298.

[40] MUSGRAVE R. [1959], *The Theory of public Finance*. McGraw-Hill, New-York.

[41] NAKAMURA Y. [1995], Rank dependent utility for arbitrary consequence space. *Mathematical social science*, 29 : 103-129.

[42] VON NEUMANN J. and MORGENSTERN O. [1944], *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, Princeton.

[43] NEWBERY D. [1970], A theorem on the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, 1 : 264-266.

[44] PIGOU A. [1912], *Wealth and Welfare*. MacMillan, London.

[45] QUIGGIN J. [1982], A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3 : 323-343.

[46] QUIGGIN J. [1982], A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3 : 323-343.

[47] QUIGGIN J. and WAKKER P. [1994], The axiomatic basis of anticipated utility : a clarification. *Journal of Economic Theory*, 64 : 487-499.

[48] RAWLS J. [1971], *A Theory of Justice*. Harvard University Press, Mass.

[49] RICHTER F. [1983], From ability to pay to concepts of equal sacrifice. *Journal of Public Economics*, 20 : 211-229.

[50] ROEMER J. [1996], *Theories of Distributive Justice*. Harvard University Press, Cambridge, Mass..

[51] ROTHSCHILD M. and STIGLITZ J. [1970], Increasing risk : I. a definition. *Journal of Economic Theory*, 2 : 225-243.

[52] SAFRA Z. and SEGAL U. [1998], Constant risk aversion. *Journal of Economic Theory*, 83 : 19-42.

[53] SAINT-PAUL G. [1992], Quelle importance accordons-nous a la distribution des revenus ? *Économie et Prévision*, 102-103 : 179-187.

[54] SCHMEIDLER D. [1986], Integral representation without additivity. *proceedings of the american mathematical society*, 97 : 255-261.

[55] SEGAL U. [1989], Anticipated utility : a measure representation approach. *Annals of operation research*, 19 : 359-373.

[56] SEGAL U. [1993], The measure representation : a correction. *Journal of Risk and Uncertainty*, 6 : 99-107.

[57] SEGAL U. [1993], Order indifference and rank-dependent probabilities. *Journal of Mathematical Economics*, 22 : 373-397.

[58] SEN A. [1973], *On Economic Inequality.* Clarendon Press, Oxford.

[59] SEN A. [1977], On weights and measures : Informational constraints in social welfare analysis. *Économetrica*, 45 : 1539-1572.

[60] SEN A. [1978], Ethical measurement of inequality : Some difficulties. In Shorrocks and Krelle, editor, *Personal Income Distribution.* North-Holland, Amsterdam.

[61] SEN A. [1982], Equality of what ? In *Choice, Welfare and Measurement*, pages 353-369, Cambridge MA, MIT Press.

[62] SEN A. [1992], *Inequality reexamined.* Harvard University Press, Mass..

[63] WAKKER P. [1994], Separating marginal utility and risk aversion. *Theory and Decision*, 36 : 1-44.

[64] WEYMARK J. [1981], Generalized gini inequality indices. *Mathematical Social Sciences*, 1 : 409-430.

[65] YAARI M. [1987], The dual theory of choice under risk. *Économetrica*, 55 : 95-115.

[66] YAARI M. [1988], A controversial proposal concerning inequality measurement. *Journal of Economic Theory*, 44 : 381-397.

[67] YITZHAKI S. [1983], On an extension of the gini inequality index. *International Economic Review*, 24 : 617-628.

[68] YOUNG H. [1987], Progressive taxation and the equal sacrifice principle. *Journal of Public Economics*, 32 : 203-214.